

Note del corso di

SISTEMI DINAMICI

Massimiliano Berti

12 Novembre 2007
Versione preliminare

Introduzione

Va sotto il nome “Sistemi Dinamici” la teoria delle equazioni differenziali ordinarie, cioè di equazioni la cui incognita è una funzione $x(t)$ che soddisfa un’equazione che coinvolge la variabile indipendente t , la funzione $x(t)$ stessa e le sue derivate $D^k x$, $k = 1, \dots, n$,

$$F(t, x, D^1 x, \dots, D^n x) = 0. \quad (1)$$

Una equazione differenziale si dice ordinaria quando la funzione incognita $x(t)$ dipende da una sola variabile scalare $t \in \mathbf{R}$ (se $t \in \mathbf{R}^n$, $n > 1$, una equazione differenziale come (1) si chiama alle derivate parziali). La equazione differenziale (1) si dice di ordine n in quanto la derivata di ordine più alto che compare è D^n .

Storicamente, lo studio sistematico delle equazioni differenziali si impose con la meccanica di Newton. La equazione fondamentale della dinamica Newtoniana, $F = ma$, è una equazione differenziale: dato un campo di forze $F : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ bisogna trovare una funzione $x(t)$ (posizione del punto materiale) tale che

$$m\ddot{x}(t) = F(x(t)), \quad x(t) \in \mathbf{R}^3,$$

dove $\ddot{x}(t) = a(t)$ è la accelerazione del punto di massa m all’istante t . Newton risolse tale equazione differenziale quando F è la forza gravitazionale, inversamente proporzionale al quadrato della distanza (1684), trovando che i moti possibili descrivono o una ellisse, o un’iperbole, o una parabola.

Newton trasmise l’importanza di studiare le equazioni differenziali esprimendosi così:

”Data aequatione quocunque fluentes quantitates involventes fluxiones invenire et viceversa”

che, in linguaggio moderno, si potrebbe tradurre “è utile risolvere le equazioni differenziali”. Ora come ora tutte le scienze esatte si basano su modelli di equazioni differenziali.

Vediamo alcuni esempi elementari di equazioni differenziali.

ESEMPIO 1. È un fatto sperimentale che la velocità di decadimento di una materia radioattiva è proporzionale alla quantità di materia stessa $x(t)$, ossia vale

$$\dot{x}(t) = -\sigma x(t).$$

Domanda: se è nota la quantità di materia radioattiva x_0 all'istante $t = 0$, quanta sarà la quantità $x(t)$ al generico istante di tempo t ?

ESEMPIO 2. La velocità di crescita della popolazione di batteri cresce proporzionalmente al numero di batteri $N(t)$, ossia vale

$$\dot{N}(t) = \sigma N(t).$$

Domanda: se è noto il numero di batteri N_0 all'istante $t = 0$, quanta sarà $N(t)$ nel tempo?

ESEMPIO 3. La velocità di crescita della popolazione di batteri cresce proporzionalmente al numero dei batteri ma, a causa di un fattore di morte soddisfa,

$$\dot{N}(t) = \sigma N(t) - k$$

Domanda: quale sarà $N(t)$ nel tempo al variare di k e σ ? A cosa tenderà al crescere del tempo?

ESEMPIO 4. La velocità di crescita della popolazione di batteri cresce proporzionalmente al numero delle coppie, ossia vale

$$\dot{N}(t) = \sigma N^2(t)$$

Domanda: la popolazione $N(t)$ cresce più o meno rapidamente che negli esempi precedenti?

ESEMPIO 5. L'angolo formato da un pendolo di lunghezza l rispetto alla verticale evolve secondo la equazione differenziale

$$l\ddot{\theta} + g \sin \theta = 0 \tag{2}$$

dove g è la accelerazione di gravità. Che soluzioni ha?

Nel caso le oscillazioni abbiano piccola ampiezza ($\sin \theta \approx \theta$), queste possono essere descritte da

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0, \quad \omega^2 := \frac{g}{l} \tag{3}$$

di cui alcune soluzioni sono ben note $\sin(\omega t)$, $\cos(\omega t)$. Sono tutte? Quanto sono vicine le soluzioni della equazione lineare (3) alle soluzioni della equazione nonlineare (2)?

Considereremo più avanti solo equazioni in forma normale, ossia in cui la derivata di grado più alto si esprime mediante le derivate di ordine inferiore

$$D^n x = g(t, x, D^1 x, \dots, D^{(n-1)} x) \quad (4)$$

come in tutti gli esempi precedenti.

Tutte le equazioni di ordine n in forma normale (4) si possono vedere come sistemi di equazioni del primo ordine in forma normale

$$\dot{y} = f(t, y), \quad y \in \mathbf{R}^n \quad (5)$$

ponendo

$$y_0 := x, \quad y_1 := D^1 x, \quad \dots, \quad y_{n-1} := D^{n-1} x$$

e, quindi,

$$y := (y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in \mathbf{R}^n$$

soddisfa un sistema della forma (5) con

$$f(t, y) := (y_1, y_2, \dots, g(t, y)).$$

Nei prossimi capitoli impareremo a rispondere a queste domande.

REFERENZE

N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone: *Analisi Matematica due*, Liguori editore.

E. Giusti, *Analisi Matematica 2*, Bollati Boringhieri.

V. I. Arnold, *Equazioni differenziali ordinarie*, Edizioni Mir.

E. Acerbi, L. Modica, S. Spagnolo, *Problemi scelti di Analisi Matematica II*, Liguori editore.

Ringrazio vivamente Marco Natale per i disegni di queste note.

Contents

Index	5
1 Il problema di Cauchy	7
1.1 Il teorema di esistenza e unicità locale	7
1.2 Il teorema delle contrazioni	14
2 Equazioni differenziali scalari autonome	18
3 Estendibilità delle soluzioni	26
3.1 Prolungamento delle soluzioni	26
3.2 Campi vettoriali definiti per ogni x	32
3.3 Integrali primi	36
4 Studio qualitativo delle soluzioni	40
4.1 Teoremi del confronto	47
4.2 Soluzioni esplicite	52
4.2.1 Equazioni a variabili separabili	52
4.2.2 Equazioni esatte	55
4.2.3 Equazioni omogenee	58
4.3 Esercizi di ricapitolazione	59
5 Equazioni lineari	60
5.1 Equazioni omogenee	60
5.2 Equazioni non-omogenee	63
5.3 Equazioni lineari di ordine n	68
5.4 Equazioni a coefficienti costanti	68
5.5 I sistemi a coefficienti costanti	77
5.5.1 Caso 1: le radici λ_i sono reali e distinte	78
5.5.2 Caso 2: una radice $\lambda = \alpha + i\beta$ è complessa	81
5.6 Esponenziale di una matrice	86
5.6.1 Il caso di radici multiple	90

6	Dipendenza da dati iniziali e parametri	93
6.1	Il lemma di Gronwall	93
6.2	Dipendenza continua rispetto ai dati iniziali	95
6.3	Dipendenza continua rispetto ai parametri	97
7	Studi qualitativi nel piano	99
8	Il teorema della funzione implicita	107
8.1	Introduzione	107
8.2	Operatori lineari	108
8.3	Richiami di calcolo differenziale	111
8.4	Il teorema della funzione implicita	112
8.4.1	Il caso $F : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$	117
8.4.2	Il caso $F : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$	121
8.4.3	Il caso $F : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$	123
8.4.4	Il caso $F : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m, n \geq m$	124
8.5	Il teorema della mappa inversa	124
8.6	Appendice	126
9	Temî d'esame	128

Chapter 1

Il problema di Cauchy

Il problema che vogliamo studiare è sapere se il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

ha soluzioni, se queste, qualora esistano, siano uniche, se siano regolari, se dipendano in modo regolare dal dato iniziale x_0 , etc...

Questo problema (1.1) “ai dati iniziali” si chiama problema di Cauchy.

Chiamiamo $f(x, t)$ il “campo vettoriale” ed \mathbf{R}^n lo “spazio delle fasi”.

1.1 Il teorema di esistenza e unicità locale

Daremo adesso delle condizioni sufficienti per garantire l’esistenza e l’unicità di una soluzione di (1.1) almeno in un intorno di $t = t_0$ (soluzione locale).

Assumiamo che

(H1) (continuità) Il campo vettoriale $f(t, x)$ sia definito e continuo nell’insieme

$$I \times J := [t_0 - a, t_0 + a] \times \{|x - x_0| \leq b\}$$

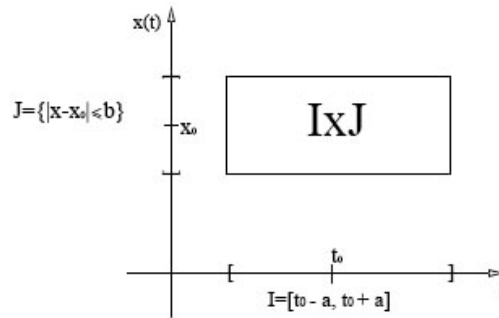
(con $a > 0, b > 0$) contenente il dato iniziale (t_0, x_0) .

(H2) (Lipschitzianità in x) Esiste una costante $L > 0$ tale che

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|, \quad \forall t \in I, \forall x_1, x_2 \in J.$$

Teorema 1.1.1 (Cauchy) *Se il campo vettoriale f soddisfa (H1)-(H2), allora esiste una unica soluzione di (1.1) definita in un intorno di t_0 (soluzione locale). Precisamente esiste una unica funzione di classe C^1 ,*

$$x : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \rightarrow J,$$

Figure 1.1: Il dominio del campo vettoriale $f(t, x)$

che soddisfa (1.1) con

$$\delta < \min \left\{ \frac{b}{M}, \frac{1}{L}, a \right\} \quad (1.2)$$

dove $M := \max_{I \times J} |f(t, x)|$.

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo l'equazione integrale (di Volterra)

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau. \quad (1.3)$$

Se troviamo una funzione continua che risolve (1.3) allora, $x(t)$ è di classe C^1 , $x(t_0) = x_0$, e, derivando, abbiamo una soluzione del problema di Cauchy (1.1).

Cerchiamo una soluzione di (1.3) in

$$X := \left\{ x : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \rightarrow J \subset \mathbf{R}^n, x \text{ continua} \right\} \subset C([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \mathbf{R}^n)$$

con $\delta \leq a$.

È ben noto che quest'ultimo spazio $C([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \mathbf{R}^n)$, munito della "norma del sup"

$$\|x\|_\infty := \sup_{t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]} |x(t)|,$$

è uno spazio di Banach (spazio normato completo), vedi ad esempio il libro di Analisi Matematica due di Fusco-Marcellini-Sbordone, cap. 2; o di Giusti, cap. 1). Essendo J un sottoinsieme chiuso in \mathbf{R}^n si vede facilmente che X è chiuso in $C([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \mathbf{R}^n)$, ossia che $(X, \|\cdot\|_\infty)$ è uno spazio metrico

completo.

ESERCIZIO Dimostrare la affermazione precedente.

SOLUZIONE Sia $x_n \in X$ una successione di funzioni continue convergente uniformemente ad $\bar{x} \in C([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \mathbf{R}^n)$. Bisogna provare che $\bar{x} \in X$, ossia $\bar{x}(t) \in J, \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ (già sappiamo che \bar{x} è una funzione continua in quanto limite uniforme di funzioni continue). Essendo, $\forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta], x_n(t) \in J, x_n(t) \rightarrow \bar{x}(t)$ e J chiuso, si deduce che $\bar{x}(t) \in J$.

ESERCIZIO Un sottoinsieme chiuso $X \subset Y$ di uno spazio metrico completo Y è completo.

SOLUZIONE Una successione di Cauchy $x_n \in X$, essendo di Cauchy pure in Y , convergerà in Y ad un elemento $x \in Y$. Essendo X chiuso si deduce che $x \in X$.

Definiamo l'operatore nonlineare

$$\Phi(x)(t) := x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau.$$

Per provare il teorema basta che dimostriamo che

i) $\Phi : X \rightarrow X$.

ii) $\Phi : X \rightarrow X$ è una contrazione.

i). Naturalmente se $x(t)$ è una funzione continua, pure $\Phi(x)(t)$ è una funzione continua. Bisogna provare che $\Phi(x)$ ha immagine in J , ossia $\Phi(x)(t) \in J, \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. Questo è garantito da

$$|\Phi(x)(t) - x_0| \leq \left| \int_{t_0}^t |f(\tau, x(\tau))| d\tau \right| \leq M\delta \leq b$$

dove $M := \max_{I \times J} |f(t, x)| < +\infty$ essendo $f(t, x)$ una funzione continua sul compatto $I \times J$.

La prima condizione su δ è dunque

$$\delta \leq \frac{b}{M}.$$

ii). $\forall x_1, x_2 \in X$ abbiamo

$$\begin{aligned} \|\Phi(x_1) - \Phi(x_2)\|_\infty &= \sup_{t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]} \left| \int_{t_0}^t f(\tau, x_1(\tau)) - f(\tau, x_2(\tau)) d\tau \right| \\ &\leq \sup_{t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]} \left| \int_{t_0}^t |f(\tau, x_1(\tau)) - f(\tau, x_2(\tau))| d\tau \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(H2)}{\leq} \sup_{t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]} \left| \int_{t_0}^t L |x_1(\tau) - x_2(\tau)| d\tau \right| \\
& \leq \sup_{t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]} |t - t_0| L \|x_1 - x_2\|_\infty \quad (1.4) \\
& \leq \delta L \|x_1 - x_2\|_\infty \quad (1.5)
\end{aligned}$$

e quindi Φ è una contrazione assumendo

$$\delta < \frac{1}{L}.$$

Pertanto, assumendo che δ soddisfi (1.2), dal teorema delle contrazioni deduciamo che Φ ha uno ed un solo punto fisso in X . ■

ESERCIZIO Dimostrare che se il campo vettoriale f è definito in $I \times \mathbf{R}^n$ allora esiste una unica soluzione locale di (1.1) in $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ con

$$\delta < \min \left\{ \frac{1}{L}, a \right\}. \quad (1.6)$$

Suggerimento: la prima condizione $\delta \leq b/M$ non c'è poiché $f(t, \cdot)$ è definito su tutto \mathbf{R}^n .

Notiamo che abbiamo anche di più dalla dimostrazione del teorema delle contrazioni (vedi teorema 1.2.1): la successione di funzioni

$$\begin{aligned}
x_0(t) &:= x_0 \\
x_1(t) &:= x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x_0) d\tau \\
x_2(t) &:= x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x_1(\tau)) d\tau \\
&\dots \\
x_n(t) &:= x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x_{n-1}(\tau)) d\tau
\end{aligned}$$

detta “successione delle approssimazioni successive di Picard” converge uniformemente alla soluzione $x(t)$ in $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

ESEMPIO Costruire la successione delle “approssimazioni successive di Picard” per il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = x, & x \in \mathbf{R} \\ x(0) = 1. \end{cases} \quad (1.7)$$

Notiamo che

$$x_0(t) := 1$$

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &:= 1 + \int_0^t 1 \, d\tau = 1 + t \\
 x_2(t) &:= 1 + \int_0^t (1 + \tau) \, d\tau = 1 + t + \frac{t^2}{2} \\
 &\quad \dots \\
 x_n(t) &:= 1 + t + \frac{t^2}{2} + \dots + \frac{t^n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!}
 \end{aligned}$$

che converge uniformemente alla soluzione e^t di (1.7). Eulero introdusse l'esponenziale proprio come soluzione dell'equazione (1.7).

ESERCIZIO Provare che lo spazio $C^1([a, b])$, munito della norma

$$\|f\|_{C^1} := \|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty} \quad (1.8)$$

è uno spazio di Banach.

SOLUZIONE Sia $f_n \in C^1$ una successione di Cauchy rispetto alla norma $\|\cdot\|_{C^1}$. Quindi f_n ed f'_n sono successioni di Cauchy in $C[a, b]$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_{\infty}$. Già sappiamo che $(C[a, b], \|\cdot\|_{\infty})$ è completo e, pertanto, esistono $f, g \in C[a, b]$ tali che $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{\infty}} f$, $f'_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{\infty}} g$ uniformemente. Allora, per il criterio di derivazione delle successioni, la funzione f è derivabile e la sua derivata coincide con il limite delle derivate, cioè $f' = g$. Abbiamo provato che $f_n \xrightarrow{C^1} f$.

DOMANDA La successione delle “approssimazioni successive di Picard” dell'esempio (1.7) converge alla soluzione e^t anche in $C^1([-T, T])$, $\forall T > 0$?

RISPOSTA Sì. Perché?

L'esempio (1.7) ci dice anche che ci dovremmo aspettare di poter migliorare la stima (1.6) sull'intervallo di esistenza della soluzione. Infatti in questo esempio il procedimento del teorema di Cauchy ci garantirebbe la convergenza e la soluzione solo sull'intervallo $(-1/L, 1/L)$ (notando che $a = +\infty$).

In effetti la stima di δ si può migliorare senza aggiungere ipotesi al teorema di Cauchy.

Teorema 1.1.2 *Nelle stesse ipotesi del teorema 1.1.1 la soluzione di (1.1) esiste in $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ con*

$$\delta < \min \left\{ \frac{b}{M}, a \right\}. \quad (1.9)$$

DIMOSTRAZIONE. Basta mostrare che, se δ soddisfa solo (1.9), allora esiste almeno una iterata di Φ , Φ^n , che è una contrazione, vedi teorema 1.2.2.

Questo si basa sul seguente lemma

Lemma 1.1.1 $\forall x_1, x_2 \in X$ vale, $\forall t \in I$

$$|\Phi^n(x_1)(t) - \Phi^n(x_2)(t)| \leq \frac{L^n |t - t_0|^n}{n!} \|x_1 - x_2\|_\infty. \quad (1.10)$$

DIMOSTRAZIONE. Per induzione. Per $n = 1$ lo abbiamo già provato in (1.4). Se (1.10) è vera per n allora dobbiamo provare che sia vera per $n + 1$. Abbiamo

$$\begin{aligned} |\Phi^{n+1}(x_1)(t) - \Phi^{n+1}(x_2)(t)| &= |\Phi(\Phi^n x_1)(t) - \Phi(\Phi^n(x_2))(t)| \\ &= \left| \int_{t_0}^t f(\tau, \Phi^n(x_1)(\tau)) - f(\tau, \Phi^n(x_2)(\tau)) d\tau \right| \\ &\leq \sup_{t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]} \left| \int_{t_0}^t f(\tau, \Phi^n(x_1)(\tau)) - f(\tau, \Phi^n(x_2)(\tau)) d\tau \right| \\ &\stackrel{(H2)}{\leq} \sup_{t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]} \left| \int_{t_0}^t L |\Phi^n(x_1)(\tau) - \Phi^n(x_2)(\tau)| d\tau \right| \\ &\stackrel{(1.10)}{\leq} \sup_{t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]} \left| \int_{t_0}^t L \frac{L^n |\tau - t_0|^n}{n!} \|x_1 - x_2\|_\infty d\tau \right| \\ &= \frac{L^{n+1} |t - t_0|^{n+1}}{(n+1)!} \|x_1 - x_2\|_\infty \end{aligned}$$

provando il lemma. ■

Dal lemma precedente si ottiene

$$\|\Phi^n(x_1) - \Phi^n(x_2)\|_\infty \leq \frac{L^n \delta^n}{n!} \|x_1 - x_2\|_\infty$$

ed essendo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L^n \delta^n}{n!} = 0$$

deduciamo che, per ogni δ che verifica (1.9), esiste un n tale che Φ^n è una contrazione. Quindi Φ ha uno ed un solo punto fisso. ■

Osservazione 1.1.1 Se $\partial_x f(t, x)$ è continua in $I \times J$, allora l'ipotesi di Lipschitzianità **(H2)** è soddisfatta, per il teorema del valor medio, con $L := \max_{I \times J} |\partial_x f(t, x)|$.

Teorema 1.1.3 (Regolarità) *Se $f(t, x)$ è di classe C^k , $k \geq 0$ (nelle variabili (t, x)) allora la soluzione $x(t)$ è una funzione di classe C^{k+1} (in t). Se $f \in C^\infty$ allora $x(t) \in C^\infty$.*

DIMOSTRAZIONE. Sappiamo già che $x(t)$ è C^1 in t . Se $k = 0$ abbiamo già finito. Supponiamo allora $k \geq 1$. Quindi $f(t, x(t))$ è C^1 . Inoltre, poichè $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$, deduciamo che $\dot{x}(t)$ è C^1 , cioè $x(t) \in C^2$. Iterando questo procedimento k volte si conclude.

Una dimostrazione formale può essere fatta con il principio di induzione. Farlo per esercizio. ■

ESERCIZIO Supponiamo che $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ soddisfi l'ipotesi di Lipschitzianità globale: esiste $L > 0$ tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbf{R}^n. \quad (1.11)$$

Dimostrare che esiste una soluzione di

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

definita per tutti i tempi $t \in \mathbf{R}$.

SUGGERIMENTO: una possibile soluzione dell'esercizio è dimostrare che per ogni intervallo $[-T, T]$ esiste una unica soluzione seguendo il procedimento del teorema 1.1.2 (ciò che capita con l'esponenziale).

Un'altra soluzione consiste nell'estendere indefinitamente la soluzione (vedi il capitolo 3) notando che l'intervallo di esistenza locale non dipende dal dato iniziale (provarlo).

Infine un'altra è dimostrare che nello spazio di Banach

$$X := \{x : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n : x \text{ continua, } \|x\| := \sup_{t \in \mathbf{R}} |x(t)| e^{-k|t|}\},$$

se $k > L$, l'operatore di Volterra è una contrazione.

Per provare che X è completo si può seguire il procedimento simile per dimostrare che $(C([a, b], \mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$ è completo. Per provare che l'operatore integrale di Volterra mappa X in sé si usa che, da (1.11), la funzione $f(x)$ cresce al più linearmente, ossia, $|f(x)| \leq |f(0)| + L|x|$. Per provare che l'operatore integrale di Volterra è una contrazione in X si usa nuovamente (1.11) e la condizione $k > L$.

ESERCIZIO Provare che la soluzione di

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{tx^3}{1+x^2} + t^2 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

è definita per tutti i tempi $t \in \mathbf{R}$.

SUGGERIMENTO: mostrare che $f(t, x) := \frac{tx^3}{1+x^2} + t^2$ è Lipschitziana rispetto alla variabile x in ogni intervallo di tempo $t \in [-M, M]$ e ragionare come all'esercizio precedente.

La ipotesi (1.11) è naturalmente sufficiente a garantire l'esistenza di una soluzione per tutti i tempi, ma non è necessaria. Vedremo (cfr. equazione (3.8)) che, ad esempio,

$$\begin{cases} \dot{x} = x^4 \sin x \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

ha tutte le soluzioni limitate anche se, ovviamente, non soddisfa l'ipotesi di Lipschitzianità globale (1.11).

1.2 Il teorema delle contrazioni

Sia (X, d) uno spazio metrico. Una mappa

$$\Phi : X \rightarrow X$$

si dice una contrazione se è Lipschitz di costante di Lipschitz $\lambda \in (0, 1)$, cioè se esiste $\lambda \in (0, 1)$, tale che

$$d(\Phi(x), \Phi(y)) \leq \lambda d(x, y) \quad \forall x, y \in X. \quad (1.12)$$

ESERCIZIO Provare che, se $f \in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ ha derivata $|f'(x)| \leq \lambda < 1$, $\forall x \in \mathbf{R}$, allora f è una contrazione di \mathbf{R} . Si può concludere che f è una contrazione assumendo solo $|f'(x)| < 1$, $\forall x \in \mathbf{R}$?

Teorema 1.2.1 (Banach-Caccioppoli) *Sia (X, d) uno spazio metrico completo. Allora Φ ha uno ed un solo punto fisso $x \in X$, ossia $\Phi(x) = x$.*

Comunque si prenda $x_0 \in X$, tale punto fisso x è il limite

$$x = \lim \Phi^n(x_0).$$

La velocità di convergenza di $\Phi^n(x_0)$ verso x può essere stimata da

$$d(x, \Phi^n(x_0)) \leq d(\Phi(x_0), x_0) \frac{\lambda^n}{1 - \lambda}$$

che tende a zero esponenzialmente per $n \rightarrow +\infty$.

DIMOSTRAZIONE. Prendo un qualunque $x_0 \in X$ e considero l'orbita

$$x_n := \Phi^n(x_0) \in X, \quad n = 1, 2, \dots,$$

generata da Φ , cioè

$$x_n = \Phi(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots,$$

Dico che x_n è di Cauchy. Infatti

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(\Phi(x_n), \Phi(x_{n-1})) \stackrel{(1.12)}{\leq} \lambda d(\Phi(x_{n-1}), \Phi(x_{n-2}))$$

e quindi, iterando,

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \lambda^n d(x_1, x_0). \quad (1.13)$$

Da questa stima si deduce

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+k}) &\leq \sum_{j=n}^{n+k-1} d(x_j, x_{j+1}) \\ &\stackrel{(1.13)}{\leq} \sum_{j=n}^{n+k-1} \lambda^j d(x_1, x_0) \\ &\leq d(x_1, x_0) \sum_{j=n}^{+\infty} \lambda^j \\ &= d(x_1, x_0) \frac{\lambda^n}{1 - \lambda}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Quindi x_n è una successione di Cauchy. Essendo X uno spazio completo, esiste $x \in X$ tale che

$$x_n \rightarrow x \in X.$$

Essendo $x_{n+1} = \Phi(x_n)$, $\forall n$, passando al limite, si ottiene, $x = \Phi(x)$, cioè x è un punto fisso di Φ . Inoltre, sempre da (1.14), passando al limite in k si ottiene

$$d(x_n, x) \leq d(x_1, x_0) \frac{\lambda^n}{1 - \lambda}$$

che mi stima la velocità di convergenza.

La unicità del punto fisso x è ovvia essendo Φ una contrazione: se $x_1 = \Phi(x_1)$, $x_2 = \Phi(x_2)$, allora

$$d(x_1, x_2) = d(\Phi(x_1), \Phi(x_2)) \stackrel{(1.12)}{\leq} \lambda d(x_1, x_2)$$

e, quindi, $d(x_1, x_2) = 0$, i.e. $x_1 = x_2$. ■

ESEMPIO La mappa $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definita da

$$f(x) := \sqrt{1+x^2}$$

ha in ogni punto $|f'(x)| < 1$ ma non ha punti fissi. L'ipotesi di stretta contrazione non può essere rimossa.

Vale la seguente generalizzazione del teorema delle contrazioni in cui si ottiene lo stesso risultato di esistenza con ipotesi più deboli.

Teorema 1.2.2 *Sia (X, d) uno spazio metrico completo. Se esiste un n_0 tale per cui Φ^{n_0} è una contrazione allora Φ ha uno ed un solo punto fisso.*

Inoltre, comunque si prenda $x_0 \in X$ si ha che $\Phi^n(x_0)$ tende all'unico punto fisso di Φ .

Qui

$$\Phi^n := \Phi \circ \dots \circ \Phi : X \rightarrow X$$

indica la mappa ottenuta componendo n volte la mappa Φ .

DIMOSTRAZIONE. Dal teorema di Banach-Caccioppoli Φ^{n_0} ha un unico punto fisso x :

$$x = \Phi^{n_0}(x).$$

Pertanto

$$\Phi(x) = \Phi(\Phi^{n_0}(x)) = \Phi^{n_0}(\Phi(x)),$$

ossia $\Phi(x)$ è anch'esso un punto fisso di Φ^{n_0} . Quindi $\Phi(x)$ deve coincidere con x (unico punto fisso di Φ^{n_0}), cioè $\Phi(x) = x$.

Infine, essendo la mappa Φ^{n_0} una contrazione, le successioni

$$(\Phi^{n_0})^k(x_0) = (\Phi^{kn_0})(x_0) \rightarrow x \quad \text{per } k \rightarrow +\infty,$$

$$(\Phi^{n_0})^k(\Phi(x_0)) = (\Phi^{kn_0+1})(x_0) \rightarrow x \quad \text{per } k \rightarrow +\infty,$$

...

$$(\Phi^{n_0})^k(\Phi^{n_0-1}(x_0)) = (\Phi^{kn_0+(n_0-1)})(x_0) \rightarrow x \quad \text{per } k \rightarrow +\infty.$$

Pertanto tutta la successione $(\Phi^n)(x_0) \rightarrow x$.

L'unicità del punto fisso di Φ è ovvia poichè ogni punto fisso di Φ è pure punto fisso della contrazione Φ^{n_0} . ■

ESERCIZIO 1. Sia (X, d) uno spazio metrico completo, $\bar{x} \in X$, $r > 0$,

$$f : D := \overline{B(\bar{x}, r)} \rightarrow X$$

tale che per $\lambda \in (0, 1)$

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

Dimostrare che, se $d(\bar{x}, f(\bar{x})) \leq r(1 - k)$, allora f ha un unico punto fisso.

ESERCIZIO 2. Dimostrare che esiste un'unica funzione continua $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tale che

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 \sin(x + f(y)) dy$$

per ogni $x \in [0, 1]$.

ESERCIZIO 3. Sia $K \in C([0, 2], \mathbf{R}^+)$ ed $h \in C([0, 1], \mathbf{R})$. Provare che esiste un'unica $u \in C([0, 1], \mathbf{R})$ tale che

$$u(x) = h(x) + \int_0^1 K(x + y)u(y) dy.$$

ESERCIZIO 4. Provare che lo spazio $C([-1, 1])$, munito della norma

$$\|f\|_2 := \sqrt{\int_{[-1, 1]} |f(x)|^2 dx}$$

(si provi dapprima che $\|\cdot\|_2$ è una norma) NON è completo. Ad esempio la successione di funzioni continue

$$f_n(x) := \begin{cases} -1 & x \in [-1, 1/n] \\ nx & x \in [1/n, 1/n] \\ +1 & x \in [1/n, 1] \end{cases}$$

è di Cauchy nella norma $\|\cdot\|_2$ ma non converge uniformemente a nessuna funzione di $C([-1, 1])$.

SUGGERIMENTO: Se f_n convergesse uniformemente a una funzione f allora f sarebbe continua (perchè?) e, inoltre, $f_n(x)$ dovrebbe convergere anche puntualmente a $f(x)$. A chi converge puntualmente $f_n(x)$? Concludere.

ESERCIZIO 5. Sia (X, d) uno spazio metrico completo. Si consideri una famiglia di contrazioni

$$T_\lambda : X \rightarrow X \quad d(T_\lambda(x), T_\lambda(y)) \leq \frac{1}{2} d(x, y)$$

per $\lambda \in [0, 1]$.

Chiamiamo x_λ l'unico punto fisso di T_λ . Supponiamo che

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} T_\lambda(x) = T_0(x), \quad \forall x \in X. \quad (1.15)$$

Provare che $\lim_{\lambda \rightarrow 0} x_\lambda = x_0$.

Provare che la stessa conclusione si ottiene anche se (1.15) vale solo $\forall x \in D$ dove D è un insieme denso in X , cioè $\bar{D} = X$.

Chapter 2

Equazioni differenziali scalari autonome

Studiamo adesso le equazioni differenziali autonome

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbf{R} \quad (2.1)$$

il cui spazio delle fasi è la retta \mathbf{R} e il cui campo vettoriale $f(x)$ è indipendente dal tempo.

Assumeremo sempre che $f(x)$ sia una funzione continua.

Per equazioni della forma (2.1) si ha addirittura una rappresentazione esplicita “per quadrature” delle soluzioni, cioè le soluzioni possono essere ottenute mediante calcolo di integrali ed inversioni di funzioni.

Ci domandiamo cosa fa soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Esiste? È unica? In che intervalli di tempo esiste? Come si scrive?

Osservazione 2.0.1 *Essendo il campo $f(x)$ autonomo, cioè indipendente dal tempo, non è restrittivo considerare il problema di Cauchy con condizione iniziale per $t_0 = 0$. Infatti se $x(t)$ è soluzione di (2.1) allora tutte le traslate $x(t - \tau)$, $\tau \in \mathbf{R}$, sono soluzioni di (2.1).*

Consideriamo dapprima l'insieme degli equilibri

$$E := \{f(x) = 0\}.$$

L'insieme E è chiuso, essendo f continua.

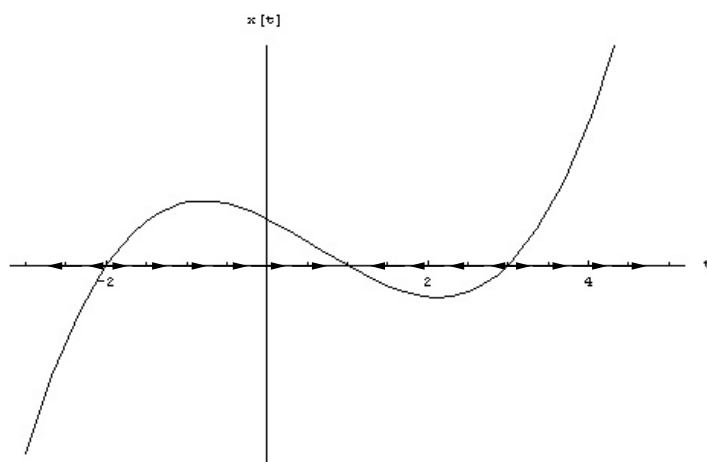


Figure 2.1: Il campo vettoriale $f(x)$ ha tre equilibri. Le frecce indicano che dove il campo vettoriale $f(x) > 0$ (risp. < 0) le soluzioni $t \mapsto x(t)$ sono monotone crescenti (risp. decrescenti).

Se $x_0 \in E$ allora $f(x_0) = 0$ e, quindi, la funzione costante $x(t) = x_0$, $\forall t$, è una soluzione della equazione differenziale (2.1) soddisfacente il dato iniziale $x(t_0) = x_0$.

Consideriamo poi l'insieme

$$E^+ := \{f(x) > 0\}.$$

L'insieme E^+ è aperto poiché f è continua. Quindi risulta che

$$E^+ = \bigcup_n (x_n, x_{n+1})$$

è un'unione finita o, al più, numerabile, di intervalli aperti (x_n, x_{n+1}) , eventualmente illimitati.

Analogamente consideriamo l'aperto

$$E^- := \{f(x) < 0\} = \bigcup_n (b_n, b_{n+1}).$$

Teorema 2.0.3 *Sia f continua. Sia $f(x_0) \neq 0$. Allora il problema di Cauchy (2.2) ha sempre una ed una soluzione $x(t)$ definita almeno localmente attorno a $t = t_0$. Essa soddisfa*

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{du}{f(u)} = t - t_0. \quad (2.3)$$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo ad esempio che $x_0 \in E^+$, cioè $f(x_0) > 0$.

a) Sia $x(t)$ una soluzione di (2.3). Per t vicini a t_0 , si ha $f(x(t)) > 0$. Quindi

$$\frac{\dot{x}(t)}{f(x(t))} = 1.$$

Integrando nel tempo

$$\int_{t_0}^t \frac{\dot{x}(\tau)}{f(x(\tau))} d\tau = \int_{t_0}^t 1 d\tau = t - t_0.$$

La funzione $x(t)$ è localmente invertibile poichè $\dot{x}(t) = f(x(t)) \neq 0$. Quindi posso cambiare variabile

$$y := x(t)$$

ottenendo

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dy}{f(y)} = t - t_0.$$

cioè (2.3). Notiamo che la funzione

$$\Psi(z) := \int_{x_0}^z \frac{dy}{f(y)} \tag{2.4}$$

è localmente invertibile poichè la sua derivata $\Psi'(z) = 1/f(z) > 0$. Quindi la $x(t)$ è univocamente determinata come soluzione di

$$\Psi(z) = t, \quad x(t) = \Psi^{-1}(t). \tag{2.5}$$

Abbiamo provato l'unicità locale della soluzione.

b) Viceversa. La funzione

$$x(t) = \Psi^{-1}(t)$$

è una funzione di classe C^1 che risolve (2.3). Quindi $x(t)$ è soluzione del problema di Cauchy (2.2). Abbiamo provato l'esistenza. ■

Il metodo di sopra si chiama il metodo di “separazione delle variabili”. Lo ritroveremo alla sezione 4.2.

ESERCIZIO Trovare le soluzioni dei problemi di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

ed

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Risposta: $x(t) = x_0 e^t$, $x(t) = x_0 / (1 - x_0 t)$. Notiamo che nel primo caso la soluzione è definita per tutti i tempi, nel secondo caso no, cessando di esistere all'istante $t := 1/x_0$.

Vogliamo, in generale, capire in quale intervallo di tempo esiste la soluzione definita dalla (2.3).

Vista la formula (2.5) tutto sta a capire com'è fatta la funzione $\Psi(z)$ che esprime il “tempo di percorrenza” per andare dal punto x_0 al punto z .

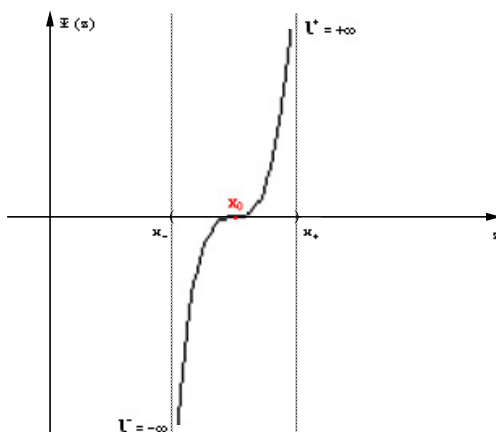


Figure 2.2: La funzione $\Psi(z)$ che descrive il tempo di percorrenza tra x_0 e z . Se i $\lim_{z \rightarrow x_{\pm}} \Psi(z) = \pm\infty$ allora la soluzione $x(t)$ esiste per tutti i tempi.

Sia $x_0 \in (x_-, x_+)$ dove (x_-, x_+) è la componente connessa di E^+ che contiene x_0 e consideriamo la funzione

$$\Psi : (x_-, x_+) \rightarrow \mathbf{R}$$

(che è ben definita poichè $f(z) > 0$ in tutto (x_-, x_+)). Ψ è monotona crescente ed esistono i limiti

$$\lim_{z \rightarrow x_{\pm}} \Psi(z) = \lim_{z \rightarrow x_{\pm}} \int_{x_0}^z \frac{dy}{f(y)} := l^{\pm}$$

(integrali impropri). Tutto dipende se tali limiti sono finiti o infiniti.

Se l^{\pm} sono infiniti allora Ψ è surgettiva su \mathbf{R} e, quindi, per ogni $t \in \mathbf{R}$ esiste una ed una sola soluzione $x(t)$.

Se, invece, l^{\pm} sono finiti, allora all'istante l^+ la soluzione $x(t)$ ha raggiunto l'equilibrio x^+ e, analogamente, $x(l^-) = x_-$.

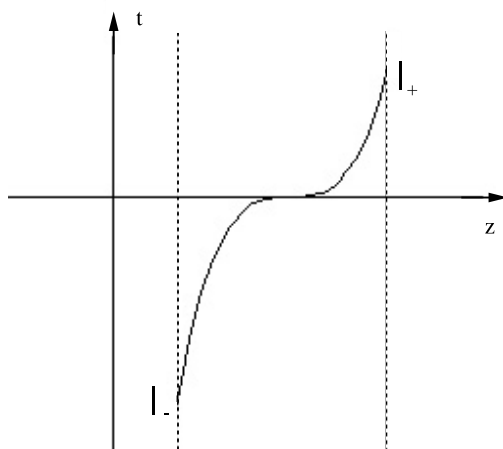


Figure 2.3: Se $\lim_{z \rightarrow x_{\pm}} \Psi(z) = l^{\pm}$ con l^{\pm} finiti, allora, in tempo finito la soluzione raggiunge l'equilibrio $x = 0$. Si perde la unicit  delle soluzioni.

In questo secondo caso, abbiamo perso l'unicit  delle soluzioni. Infatti abbiamo almeno 2 soluzioni dell'equazione (2.1) che all'istante $t = l^{\pm}$ coincidono nel punto x^+ (quali? ce ne sono altre? quante?).

Poich  sappiamo che, se f   Lipschitziana, si ha sempre unicit  delle soluzioni (teorema di Cauchy), significa che, se f   Lipschitz (anche solo localmente Lipschitz) si pu  verificare solo $l^{\pm} = \pm\infty$.

Infatti dalla condizione di Lipschitzianit  si ha

$$|f(y)| = |f(y) - f(x_+)| \leq L|y - x_+|$$

e quindi

$$\frac{1}{L|y - x_+|} \leq \frac{1}{f(y)}$$

che, integrata, da

$$\int_{x_0}^z \frac{dy}{L|y - x_+|} \leq \int_{x_0}^z \frac{dy}{f(y)}.$$

Ora, l'integrale improprio

$$\lim_{z \rightarrow x^+} \int_{x_0}^z \frac{dy}{L|y - x_+|} = +\infty$$

e, quindi, pure $l^+ = +\infty$.

Questo esempio mostra per quale motivo si possa avere perdita dell'unicit  delle soluzioni: se $f(x)$ non   Lipschitz nell'intorno dell'equilibrio pu  accadere che il campo vettoriale $f(x)$ sia troppo grande in un intorno dell'

equilibrio per cui la soluzione raggiunge, in un tempo finito, l'equilibrio (la funzione $1/f(y)$ non tende abbastanza rapidamente all'infinito da avere integrale improprio divergente).

ESERCIZIO In quanto tempo la soluzione di

$$\begin{cases} \dot{x} = 2\sqrt{|x|} \\ x(0) = -1 \end{cases}$$

raggiunge l'equilibrio $x = 0$? Quante soluzioni ha questo problema di Cauchy?

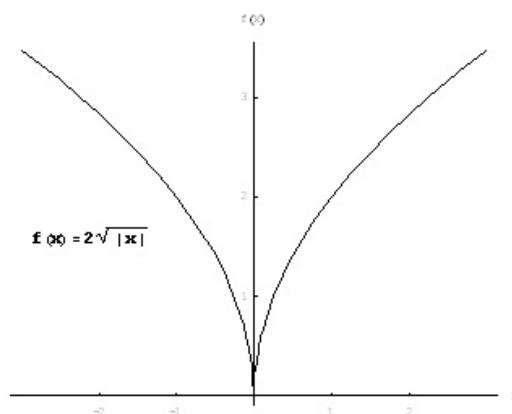


Figure 2.4: La funzione $f(x) = 2\sqrt{|x|}$ non è Lipschitz in nessun intorno dell'origine.

ESERCIZIO Provare che tutte e sole le soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = 2\sqrt{|x|} \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

sono, al variare di $a < 0 < b$ (eventualmente infiniti), date da

$$x(t) = \begin{cases} -(t+a)^2 & t < a \\ 0 & a < t < b \\ (t-b)^2 & t > b \end{cases}$$

ESERCIZIO Trovare tutte e sole le soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = (2k+1)|x|^{2k/(2k+1)} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

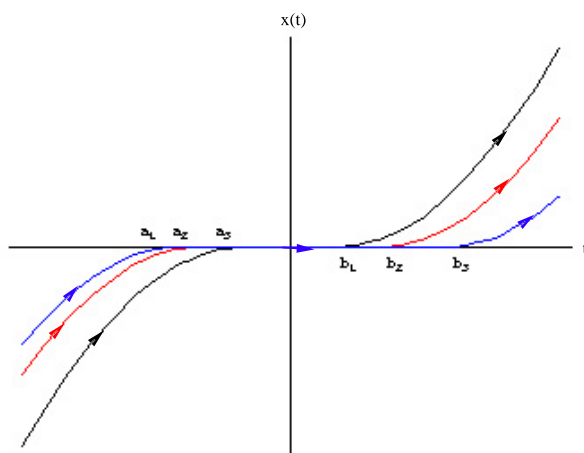


Figure 2.5: Disegno delle soluzioni di (2.6). Il problema di Cauchy

dove $k \in \mathbf{N}$.

Provare che la funzione $f(x) := |x|^{2k/(2k+1)}$ non è Lipschitz, ma che è Hölderiana, cioè che esistono costanti $\alpha \in (0, 1)$, $L > 0$, tale che

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|^\alpha, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}.$$

$\alpha := 2k/2k + 1$. Più precisamente vale, per $\alpha \in (0, 1)$,

$$||x_1|^\alpha - |x_2|^\alpha| \leq |x_1 - x_2|^\alpha, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$$

(ossia $L = 1$).

SUGGERIMENTO Questo discende dal provare che la funzione $\varphi(x) := x^\alpha$ è, per $x > 0$, sub-additiva, ossia

$$\varphi(a + b) \leq \varphi(a) + \varphi(b), \quad \forall a, b \geq 0.$$

Per dimostrare questa ultima affermazione si può dividere per b ambo i membri ottenendo, per $t := b/a$ (omogeneità)

$$(1 + t)^\alpha \leq 1 + t^\alpha, \quad \forall t \geq 0.$$

Questa disequazione è vera poiché $\psi(t) := 1 + t^\alpha - (1 + t)^\alpha$ soddisfa $\psi(0) = 0$ e $\psi'(t) \leq 0$ per $t \geq 0$, essendo $\alpha \in (0, 1)$.

ESERCIZIO Disegnare le soluzioni di

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - x^2 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

al variare di $x_0 \in \mathbf{R}$. Calcolarle esplicitamente.

ESERCIZIO Disegnare la soluzione di

$$\begin{cases} \dot{x} = (x - t)^3 \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

mostrando, in particolare, che la soluzione esiste per tutti i tempi negativi. Calcolarla.

Suggerimento: si faccia il cambio di variabile $y = x - t$ per ricondursi ad una equazione autonoma.

ESERCIZIO Sia $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+$ una funzione positiva e continua. Provare che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

ha sempre una ed una sola soluzione locale.

Abbiamo dimostrato in questo caso esistenza ed unicità solo con la continuità della f . In generale, proveremo esistenza locale di una soluzione in generale del problema di Cauchy con solo l'ipotesi di continuità della f (teorema di Peano).

ESERCIZIO Sia $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione continua tale che $f(0) = 0$ ed $f(x) > 0, \forall x \neq 0$. Si supponga che

$$\exists x_+ > 0 \quad \lim_{z \rightarrow 0^+} \int_z^{x_+} \frac{dy}{f(y)} = +\infty$$

ed, analogamente

$$\exists x_- < 0 \quad \lim_{z \rightarrow 0^-} \int_{x_-}^z \frac{dy}{f(y)} = +\infty.$$

Provare che la soluzione $x(t) = 0$ è l'unica soluzione di

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

ESERCIZIO Studiare le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \dot{u} = v - u \\ \dot{v} = u - v \end{cases} \quad (2.7)$$

con i dati iniziali $u(0) = a, v(0) = b$.

Suggerimento: che equazione differenziale soddisfa $x := u - v$? che equazione differenziale soddisfa $y := u + v$? Nota: (2.7) è un sistema lineare a coefficienti costanti che impareremo a risolvere in generale nella sezione 5.5. Qui lo possiamo fare con i metodi elementari sinora svolti.

Chapter 3

Estendibilità delle soluzioni

Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

assumendo che il campo vettoriale

$$f : A \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$$

sia continuo nel dominio aperto A e sia localmente Lipschitziano in x (cioè per ogni punto $(t_0, x_0) \in A$ esiste un intorno dove f è Lipschitziana in x).

Per il teorema di esistenza ed unicità locale abbiamo che, per ogni dato iniziale $(t_0, x_0) \in A$, esiste una ed una soluzione di (3.1) definita almeno localmente in un intorno di $t = t_0$.

Da esempi nel capitolo precedente sappiamo che talvolta la soluzione esiste su tutto \mathbf{R} , talvolta no. Vogliamo capire in quali casi le soluzioni possono essere estese.

3.1 Prolungamento delle soluzioni

Definizione 3.1.1 (*Definizione di prolungamento*) *Data una soluzione $x(t)$ in (a, b) di $\dot{x} = f(t, x)$, diciamo che $y(t)$ ne è un prolungamento se y è una soluzione della stessa equazione differenziale $\dot{y} = f(t, y)$, y è definita in un intervallo (a_1, b_1) , con $(a, b) \subset (a_1, b_1)$, e $y(t)$ coincide con $x(t)$ sull'intervallo comune (a, b) .*

Definizione 3.1.2 (*Soluzione massimale*) *Una soluzione si dice massimale se non ammette alcun prolungamento.*

Nelle ipotesi sopra assunte per f che garantiscono l'unicità locale delle soluzioni abbiamo che:

Lemma 3.1.1 *Se 2 soluzioni coincidono ad un istante allora coincidono su tutto l'intervallo comune.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $x(t)$, $y(t)$ due soluzioni della stessa equazione differenziale definite nell'intervallo di tempo (a, b) . Supponiamo che ad un certo istante t_0 esse coincidano, cioè $x(t_0) = y(t_0)$. Proviamo che $x(t) \equiv y(t)$ in tutto (a, b) .

Mostriamo dapprima che $x(t) \equiv y(t)$ in tutto (t_0, b) . Se no, l'insieme

$$E := \{t \in [t_0, b) \quad : \quad x(t) \neq y(t)\}$$

è non vuoto. Chiamiamo

$$\tau := \inf E \geq t_0.$$

Per la continuità di $x(t)$ e $y(t)$, si ha

$$x(\tau) = y(\tau)$$

(altrimenti per il teorema della permanenza del segno si avrebbe $x(t) \neq y(t)$ in tutto un intorno destro e sinistro di τ , contraddicendo la definizione di estremo inferiore).

Allora le $x(t)$, $y(t)$ soddisfano lo stesso problema di Cauchy con lo stesso dato iniziale $x(\tau) = y(\tau)$ e, per il teorema di unicità, coincidono in tutto un intorno destro e sinistro di τ , contraddicendo nuovamente la definizione di estremo inferiore. ■

Teorema 3.1.1 *Ogni soluzione ammette un prolungamento massimale.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $x(t)$ una soluzione definita in (a, b) . Consideriamo l'insieme di tutti i suoi prolungamenti

$$\mathcal{P} := \{y \text{ e' un prolungamento di } x \text{ definito in } (a_1, b_1), (a, b) \subset (a_1, b_1)\}.$$

Definiamo il prolungamento massimale $z(t)$ di $x(t)$ nell'intervallo (T^-, T^+) dove

$$T^- := \inf_{y \in \mathcal{P}} a_1, \quad T^+ := \sup_{y \in \mathcal{P}} b_1$$

nel modo seguente. Se $t \in (T^-, T^+)$ allora $t \in (a_1, b_1)$ per un qualche intervallo (a_1, b_1) su cui è definito un prolungamento $y(t)$ di $x(t)$. Poniamo dunque

$$z(t) := y(t)$$

e notiamo che tale definizione non dipende dal prolungamento scelto grazie al lemma precedente.

Tale prolungamento è massimale. Se, infatti, z ammettesse un altro prolungamento in senso stretto verrebbe contraddetta la definizione di (T^-, T^+) .

■

Chiamiamo l'intervallo massimale di una qualsiasi soluzione (T^-, T^+) .

Quando possiamo estendere una soluzione $x(t)$ di $\dot{x} = f(t, x)$ definita in un intervallo (a, b) ?

Teorema 3.1.2 *Supponiamo che la soluzione $x(t)$ soddisfi*

$$\lim_{t \rightarrow b} x(t) = v_0 \quad (3.2)$$

e che $(t_0, v_0) \in A$ sia interno al dominio di definizione del campo. Allora $x(t)$ è prolungabile a destra di b .

DIMOSTRAZIONE. Per il teorema di esistenza ed unicità locale sappiamo che esiste una unica soluzione φ del problema

$$\begin{cases} \dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t)) \\ \varphi(b) = v_0 \end{cases}$$

definita in un intervallo $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.

Si verifica facilmente che la funzione

$$y(t) := \begin{cases} x(t) & \text{se } a < t < b \\ v_0 & \text{se } t = b \\ \varphi(t) & \text{se } b < t < b + \delta \end{cases}$$

è una soluzione $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$ che prolunga la $x(t)$ oltre b . ■

ESEMPIO Proviamo che le soluzioni di

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - x^2 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (3.3)$$

con $0 < x_0 < 2$ sono prolungabili per tutti i tempi, cioè $(T^-, T^+) = (-\infty, +\infty)$.

Sappiamo che $x(t) = 0$ e $x(t) = 2$ sono 2 soluzioni (di equilibrio). Il campo vettoriale $2x - x^2$ è una funzione di classe C^∞ e quindi sappiamo che esiste una soluzione $x(t)$ definita localmente. Inoltre, sempre in virtù del teorema di esistenza ed unicità locale, la soluzione $x(t) \in (0, 2)$ per tutti i tempi di (T^-, T^+) .

Proviamo che, ad esempio, $T^+ = +\infty$. Per assurdo, supponiamo che T^+ sia finito. In tutto il suo intervallo massimale si ha

$$\dot{x}(t) = 2x(t) - x^2(t) > 0$$

e quindi la $x(t)$ è monotona. Quindi esiste sicuramente finito

$$\lim_{t \rightarrow T^+} x(t) = l \leq 2$$

e, per il teorema precedente, la soluzione $x(t)$ sarebbe prolungabile a destra di T^+ .

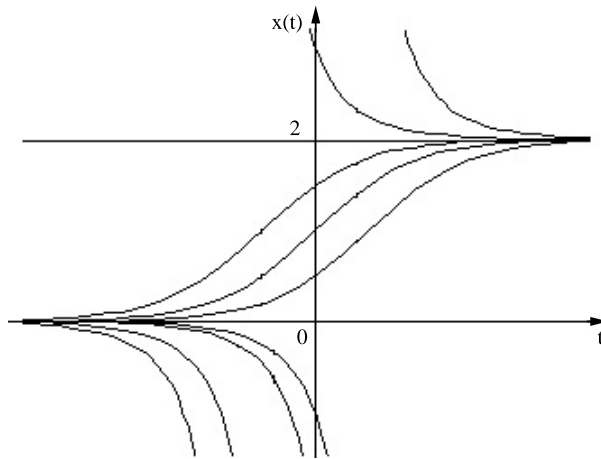


Figure 3.1: Le soluzioni di (3.3)

Analogamente si prova che $T^- = -\infty$.

DOMANDA: Quanto vale il $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$?

ESERCIZIO Sia $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione Lipschitziana e siano $x_1 < x_2$ due equilibri consecutivi (cioè $f(x) \neq 0, \forall x_1 < x < x_2$). Provare che le soluzioni di

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

con $x_0 \in (x_1, x_2)$ sono prolungabili per tutti i tempi, cioè $(T^-, T^+) = (-\infty, +\infty)$.

È utile il seguente indebolimento della condizione (3.2).

Teorema 3.1.3 *Supponiamo che esista una successione $t_n \rightarrow b^-$ tale che*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x(t_n) = v_0$$

e che $(t_0, v_0) \in A$ sia interno al dominio di definizione del campo. Allora

$$\lim_{t \rightarrow b^-} x(t) = v_0$$

e, dunque, $x(t)$ è prolungabile a destra di b .

DIMOSTRAZIONE. Sia $I \times J := [b - \alpha, b + \alpha] \times \{|x - v_0| \leq \rho\} \subset A$ un intorno compatto di (b, v_0) tutto contenuto in A .

Per n abbastanza grande $x(t_n) \in \text{int}(J) = \{|x - v_0| < \rho\}$. Affermiamo che

$$\exists n \text{ tale che } \forall t \in (t_n, b) \implies x(t) \in J. \quad (3.4)$$

Prima di dimostrare (3.4) mostriamo come discenda la tesi.

$\forall t \in (t_n, b)$ abbiamo che

$$|\dot{x}(t)| \leq |f(t, x(t))| \leq \max_{I \times J} |f(t, x)| =: M < +\infty$$

essendo f continua sul compatto $I \times J$.

Pertanto $x(t)$ soddisfa il criterio di convergenza di Cauchy:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tale che } \forall b - \delta < t_1 < t_2 < b \implies |x(t_1) - x(t_2)| \leq \varepsilon.$$

Infatti

$$|x(t_1) - x(t_2)| = |\dot{x}(\xi)| |t_2 - t_1| \leq M\delta \leq \varepsilon$$

non appena $\delta < \varepsilon/M$.

Pertanto $x(t)$ ammette limite per $t \rightarrow b$. Essendo, lungo la successione t_n , $\lim_{n \rightarrow +\infty} x(t_n) = v_0$, deduciamo che $\lim_{t \rightarrow b^-} x(t) = v_0$.

Dimostriamo adesso la (3.4). Se non fosse vera, $\forall n$, esiste almeno un istante $t \in (t_n, b)$, in cui $x(t) \notin J$, ossia l'insieme

$$E := \{t \in (t_n, b) \mid |x(t) - v_0| > \rho\}$$

è non vuoto.

Considero $\tau := \inf E$. Per la definizione di inf ed essendo $x(t)$ continua,

$$|x(\tau) - v_0| = \rho$$

e, quindi, in particolare, $t_n < \tau$ (essendo $|x(t_n) - v_0| < \rho$). Inoltre, sempre per la definizione di inf,

$$\forall t \in (t_n, \tau), \quad |x(t) - v_0| \leq \rho. \quad (3.5)$$

Allora, per un qualche $\xi \in (t_n, \tau)$, si ha

$$|x(t_n) - x(\tau)| = |\dot{x}(\xi)||t_n - \tau| \stackrel{(3.5)}{\leq} M|t_n - \tau|$$

e, passando al limite per $n \rightarrow +\infty$, poichè $x(t_n) \rightarrow v_0$, $t_n \rightarrow b$,

$$|v_0 - x(\tau)| = 0$$

che è assurdo, poichè $|v_0 - x(\tau)| = \rho > 0$ (per un'altra dimostrazione si veda Giusti, analisi 2, cap. 3). ■

ESERCIZIO Sia $x : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione uniformemente continua. Dimostrare che

$$\liminf_{t \rightarrow b^-} x(t) = \limsup_{t \rightarrow b^-} x(t)$$

e, quindi, esiste $\lim_{t \rightarrow b^-} x(t)$. Come si potrebbe applicare al ragionamento nel teorema precedente?

Un importante corollario è il seguente:

Teorema 3.1.4 *Sia $x(t)$ una soluzione massimale di $\dot{x} = f(t, x)$ e chiamiamo (T^-, T^+) il suo dominio massimale di definizione. Per ogni compatto $K \subset A$ esiste un $\delta > 0$ tale che*

$$(t, x(t)) \notin K, \quad \forall t \in (T^-, T^- + \delta) \cup (T^+ - \delta, T^+).$$

DIMOSTRAZIONE. Proviamo, ad esempio, che da un certo istante in poi la soluzione $x(t)$ è tale che $(t, x(t))$ non sta in K . Altrimenti, esisterebbe una successione di tempi $t_n \rightarrow T^+$ tale che $(t, x(t_n)) \in K$. Pertanto, a meno di sottosuccessioni, $(t, x(t_n)) \rightarrow (T^+, \bar{x}) \in K$ per un qualche \bar{x} . Per il teorema precedente la soluzione sarebbe estendibile oltre T^+ . ■

Il teorema precedente ci dice che una soluzione massimale deve “accumularsi” alla frontiera ∂A del dominio del campo A . In altre parole la soluzione può smettere di esistere solo se va verso la frontiera ∂A del dominio.

Notiamo bene che il teorema precedente non ci dice che la soluzione tende a qualche punto della frontiera del dominio, come mostra l'esempio seguente.

ESEMPIO La equazione differenziale

$$\dot{x} = x - \frac{e^t}{t^2} \cos\left(\frac{1}{t}\right)$$

ha la soluzione massimale

$$x : (-\infty, 0) \rightarrow \mathbf{R} \quad x(t) = e^t \sin\left(\frac{1}{t}\right)$$

(perchè x è massimale?) che si accumula per $t \rightarrow 0^-$ alla frontiera del campo

$$f(t, x) := x - \frac{e^t}{t^2} \cos\left(\frac{1}{t}\right)$$

definito in $(-\infty, 0) \times \mathbf{R}$. Naturalmente non esiste il limite $\lim_{t \rightarrow 0^-} x(t)$.

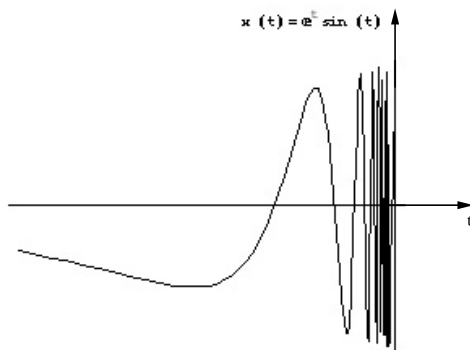


Figure 3.2: La soluzione massimale $x(t)$ non tende ad alcun limite per $t \rightarrow 0^-$.

ESERCIZIO Sia $f \in C^1([0, 1] \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$. Sia $x(t)$ una soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

definita in $[0, b) \subset [0, 1]$. Dimostrare che se $x(t)$ non può essere estesa oltre b , allora, per ogni compatto $K \subset \mathbf{R}^n$, esiste $t_K < \beta$ tale che $x(t) \notin K$ per $t_K < t < \beta$.

3.2 Campi vettoriali definiti per ogni x

Dalle considerazioni precedenti potrebbe sembrare che una soluzione $x(t)$ di una equazione differenziale potrebbe smettere di esistere soltanto se il campo vettoriale f non è definito ovunque.

Ci domandiamo, dunque, cosa succeda se il dominio di f è della forma $(\alpha, \beta) \times \mathbf{R}^n$? Le soluzioni sono definite in tutto l'intervallo (α, β) ? Se, ad esempio, $f(t, x)$ è definito per tutti i $(t, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$, la soluzione esiste per tutti i tempi?

Abbiamo già visto che la risposta è negativa con l'esempio

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ x(0) = 1 \end{cases} \quad (3.6)$$

la cui soluzione massimale è

$$x(t) = \frac{1}{t-1}.$$

In questo esempio la soluzione non è definita per tutti i tempi perchè il campo vettoriale $f(x) = x^2$ cresce “troppo rapidamente” per x grandi ed accade che la soluzione “esplode” all'infinito “in un tempo finito” (ha, come si dice, “blow up”).

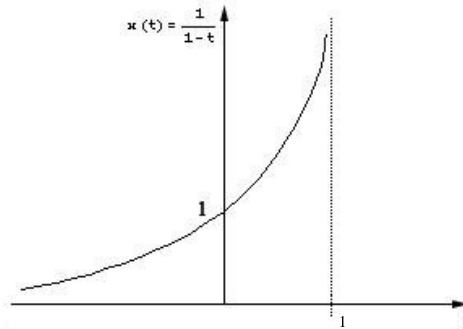


Figure 3.3: La soluzione di (3.6) non è definita per tutti i tempi. Esplode per $t \rightarrow 1$.

Il fondamentale criterio per sapere se una soluzione è estendibile è verificare che sia localmente limitata.

Corollario 3.2.1 *Sia il campo vettoriale $f(t, x)$ definito in $(\alpha, \beta) \times \mathbf{R}^n$ (con α, β eventualmente infiniti). Sia $x(t)$ una soluzione in (a, b) di $\dot{x} = f(t, x)$, $b < \beta$, localmente limitata in un intorno di b , cioè $\exists M > 0, \delta > 0$, tale che $\forall t \in (b - \delta, b)$ si ha $|x(t)| \leq M$. Allora $x(t)$ è prolungabile oltre b .*

DIMOSTRAZIONE. Essendo $|x(t)| \leq M, \forall t \in (b - \delta, b)$, esiste una successione $t_n \rightarrow b$, tale che $x(t_n) \rightarrow v_0$ per qualche v_0 con $|v_0| \leq M$. Dal teorema 3.1.3 esiste $\lim_{t \rightarrow b} x(t) = v_0$ e, poichè $(b, v_0) \in (\alpha, \beta) \times \mathbf{R}^n$, la soluzione $x(t)$ è estendibile oltre b .

Naturalmente la conclusione segue anche dal teorema 3.1.4. ■

Utilizzando il criterio del teorema precedente dimostriamo un teorema di estensione globale in questo caso.

Teorema 3.2.1 (Teorema di estensione globale) *Supponiamo che f sia definita su tutto $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$, e sia*

(H1) *continua;*

(H2) *localmente Lipschitziana;*

(H3) **(crescita al più lineare di f)** $|f(t, x)| \leq A(t) + B(t)|x|$ dove $A(t) \geq 0$, $B(t) \geq 0$ sono due funzioni continue.

In queste ipotesi esiste una unica soluzione di (3.1) definita su tutto \mathbf{R} .

DIMOSTRAZIONE. Proviamo che, ad esempio, $T^+ = +\infty$. Supponiamo per assurdo che $T^+ < +\infty$. In virtù del corollario 3.2.1, basterà dimostrare che le soluzioni restano limitate in ogni intervallo di tempo finito.

Affermiamo che vale la seguente “stima a priori”:

Lemma 3.2.1 *Poniamo $A := \max_{t \in [t_0, T^+]} A(t)$, $B := \max_{t \in [t_0, T^+]} B(t)$. La soluzione $x(t)$ di (3.1) soddisfa*

$$|x(t)| \leq \left(\frac{A}{B} + |x(t_0)| \right) e^{B|t-t_0|} - \frac{A}{B}, \quad \forall t \in [t_0, T^+],$$

se $B \neq 0$. Se $B = 0$, $|x(t)| \leq |x(t_0)| + AT^+$.

DIMOSTRAZIONE. Considero, $\forall \sigma > 0$, la funzione

$$z(t) := \sqrt{\sigma + |x(t)|^2}$$

che è di classe C^1 , $z(t) > 0$, $z(t) > |x(t)|$, e la cui derivata è

$$\dot{z}(t) = \frac{x(t) \cdot \dot{x}(t)}{\sqrt{\sigma + |x(t)|^2}}.$$

Consideriamo il caso $B \neq 0$. Si ha

$$\begin{aligned} |\dot{z}(t)| &\leq \left| \frac{x(t) \cdot \dot{x}(t)}{\sqrt{\sigma + |x(t)|^2}} \right| \leq \frac{|x(t)|}{\sqrt{\sigma + |x(t)|^2}} |\dot{x}(t)| < |\dot{x}(t)| \\ &= |f(t, x(t))| \leq A(t) + B(t)|x(t)| \leq A + B|x(t)| \\ &\leq A + Bz(t) \end{aligned} \tag{3.7}$$

e, pertanto,

$$-1 \leq \frac{\dot{z}(t)}{A + Bz(t)} \leq 1.$$

Integrando quest'ultima disequazione in $[t_0, t]$ abbiamo

$$-(t - t_0) \leq \int_{t_0}^t \frac{\dot{z}(s)}{A + Bz(s)} ds \leq (t - t_0)$$

ossia, calcolando esplicitamente l'integrale,

$$-(t - t_0) \leq \frac{1}{B} \ln \left(\frac{A + Bz(t)}{A + Bz(t_0)} \right) \leq (t - t_0)$$

da cui, elevando a potenza,

$$-e^{B(t-t_0)} \leq \frac{A + Bz(t)}{A + Bz(t_0)} \leq e^{B(t-t_0)}$$

che porta facilmente alla tesi.

Infine, se $B = 0$, da (3.7), si ha subito $|z(t)| \leq |z(t_0)| + AT^+$ e, quindi, al limite per $\sigma \rightarrow 0$, $|x(t)| \leq |x(t_0)| + AT^+$. ■

A questo punto l'assurdo è che la soluzione massimale sarebbe estendibile oltre T^+ . Infatti

$$|x(t)| \leq K^+ := \left(\frac{A}{B} + |x(t_0)| \right) e^{BT^+}, \quad \forall t \in [t_0, T^+],$$

e, quindi, esiste una successione $t_n \rightarrow T^+$, tale che $x(t_n) \rightarrow v_0$ per qualche v_0 con $|v_0| \leq K^+$. Dal teorema 3.1.3 esiste $\lim_{t \rightarrow T^+} x(t) = v_0$, $(T^+, v_0) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ e la soluzione sarebbe estendibile oltre T^+ . ■

ESERCIZIO Provare che la tesi del teorema precedente sussiste anche sostituendo l'ipotesi (H3) con l'ipotesi

$$(H3)' \quad |f(x, t)| \leq \varphi(|x|)$$

dove $\varphi(\cdot)$ è una funzione continua, positiva, crescente e

$$\int_0^{+\infty} \frac{dz}{\varphi(z)} = +\infty.$$

ESERCIZIO Provare che le soluzioni di

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin t - x \\ x(0) = a \end{cases}$$

sono definite per tutti i tempi (sai calcolare la soluzione?)

Si dimostra in modo del tutto analogo al teorema 3.2.1 (farlo per esercizio) il seguente teorema (in effetti il teorema 3.2.1 è un caso particolare del teorema 3.2.2 per $(\alpha, \beta) = \mathbf{R}$).

Teorema 3.2.2 (Teorema di estensione globale) *Supponiamo che f sia definita in $(\alpha, \beta) \times \mathbf{R}^n$, e sia **(H1)** continua; **(H2)** localmente Lipschitziana; **(H3)** $|f(t, x)| \leq A(t) + B(t)|x|$ dove $A(t) \geq 0$, $B(t) \geq 0$ sono due funzioni continue. In queste ipotesi esiste una unica soluzione di (3.1) definita su tutto (α, β) .*

ESERCIZIO Trovare il dominio massimale di definizione dei seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin(t^2 x^2) \\ x(0) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = x + t^2 \sin(x^2) \\ x(0) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = x^2 + 1 \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Naturalmente le ipotesi del teorema 3.2.1 (e del teorema 3.2.2) sono solamente sufficienti a garantire l'estendibilità delle soluzioni su tutto \mathbf{R} .

ESEMPIO Provare che tutte le soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = x^4 \sin x \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (3.8)$$

sono definite su tutto \mathbf{R} . Il problema ha infinite soluzioni di equilibrio $x_k := k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ ottenute quando $x^4 \sin x = 0$. Pertanto, ogni soluzione $x(t)$ è, o costante nel tempo, o rimane confinata tra due equilibri per tutti i tempi. Avendo stabilito "a priori" che, laddove esiste, la soluzione $x(t)$ è limitata, ne concludiamo che $x(t)$ è prolungabile indefinitamente per il corollario 3.2.1.

Naturalmente, in questo esempio il campo $f(x)$ non soddisfa la ipotesi di crescita lineare (H3) e neppure la (H3)'.

Maggiorazioni a-priori delle soluzioni possono essere ottenute mediante teoremi del confronto come vedremo alla sezione 4.1 e mediante il lemma di Gronwall alla sezione 6.1.

Un altro caso importante in cui si riescono ad avere maggiorazioni a priori delle soluzioni è rappresentato dalle equazioni che ammettono integrali primi.

3.3 Integrali primi

Consideriamo il seguente sistema nonlineare

ESEMPIO Provare che tutte le soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + xz \\ \dot{y} = x + yz \\ \dot{z} = -x^2 - y^2 \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0 \end{cases}$$

sono definite su tutto \mathbf{R} .

Il campo vettoriale

$$f(x, y, z) = (-y + xz, x + yz, -x^2 - y^2) \in \mathbf{R}^3$$

non soddisfa l'ipotesi di crescita al più lineare del teorema precedente. Nonostante ciò si vede che una qualsiasi soluzione $(x(t), y(t), z(t))$ soddisfa

$$x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2, \quad \forall t \in (T^-, T^+).$$

Infatti, derivando rispetto al tempo,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2) &= 2x(t)\dot{x}(t) + 2y(t)\dot{y}(t) + 2z(t)\dot{z}(t) \\ &= 2x(-y + xz) + 2y(x + yz) - 2z(x^2 + y^2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

e quindi $x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2$ si mantiene costante nel tempo lungo una soluzione. Quindi ogni soluzione $(x(t), y(t), z(t))$ è limitata e, pertanto, è indefinitamente prolungabile sia in avanti che indietro sempre per il corollario 3.2.1.

L'esempio precedente ci dice che ogni soluzione è vincolata a stare sulle curve di livello della funzione $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Si dice, in tal caso, che g è un integrale primo (o "quantità conservata") dell'equazione differenziale.

Definizione 3.3.1 Una funzione $G \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ si dice un integrale primo (indipendente dal tempo) di un sistema di equazioni differenziali

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbf{R}^n \tag{3.9}$$

se e solo se $G(x(t))$ è costante lungo ogni soluzione $x(t)$ di (3.9). Equivalentemente

$$\nabla G(x) \cdot f(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbf{R}^n. \tag{3.10}$$

In altre parole ogni traiettoria evolve stando nel livello $\{G(x) = G(x(0))\}$, vedi la figura 3.4.

Un esempio fondamentale di equazioni differenziali che possiedono un integrale primo è l'equazione della meccanica di Newton

$$\ddot{x} = -\nabla V(x) \tag{3.11}$$

in un campo di forze $F(x) = -\nabla V$ conservativo (V si chiama l'energia potenziale).

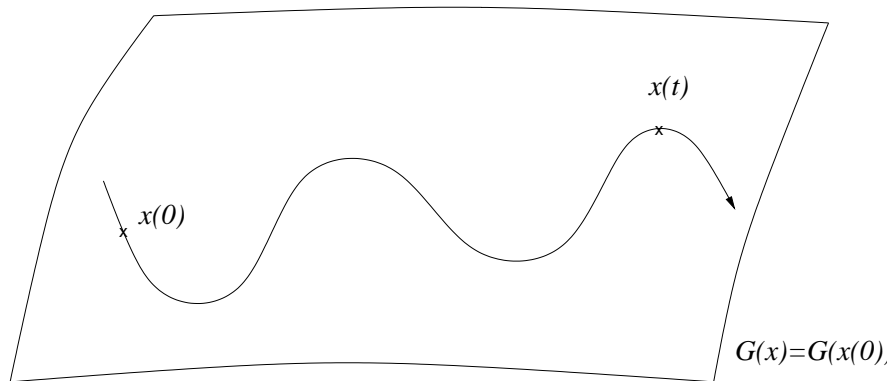


Figure 3.4: Ogni traiettoria è confinata nel livello $\{G(x) = G(x(0))\}$.

Scriviamo (3.11) come un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\nabla V(x). \end{cases} \quad (3.12)$$

è ben noto che la energia meccanica del sistema, data dalla somma dell'energia cinetica e potenziale, rimane costante nel tempo. Verifichiamo infatti che la funzione

$$E(x, v) = \frac{v^2}{2} + V(x) \quad (3.13)$$

è un integrale primo di (3.12).

ESERCIZIO Mostrare che il seguente sistema di equazioni differenziali

$$(HS) \quad \dot{x} = J\nabla H(x), \quad x \in \mathbf{R}^{2n}$$

dove $H \in C^1(\mathbf{R}^{2n}, \mathbf{R})$ e

$$J := \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \in \text{Mat}(2n \times 2n)$$

ha l'integrale primo H .

Suggerimento: si ha che

$$\frac{d}{dt}H(x(t)) = (\nabla H(x(t)), J\nabla H(x(t))) = 0$$

per la antisimmetria di J (il sistema (HS) si chiama Hamiltoniano, H la funzione Hamiltoniana, e J la matrice simplettica standard). In vari esempi H è la energia del sistema.

Abbiamo il seguente teorema

Teorema 3.3.1 *Supponiamo che il sistema*

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbf{R}^n$$

abbia un integrale primo $G : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$. Se la superficie di livello $\{G(x) = G(x_0)\}$ è un sottoinsieme limitato di \mathbf{R}^n , allora il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

ha una soluzione definita per tutti i tempi.

DIMOSTRAZIONE. La soluzione $x(t)$ sta sempre nell'insieme limitato $G^{-1}(G(x_0))$ e, quindi, per il corollario 3.2.1, è prolungabile indefinitamente. ■

Teorema 3.3.2 *Supponiamo che l'energia potenziale $V(x) \geq -h$ sia limitata inferiormente. Allora tutte le soluzioni dell'equazione di Newton (3.11) sono definite per tutti i tempi.*

DIMOSTRAZIONE. Dalla conservazione dell'energia meccanica

$$E = \frac{v^2(t)}{2} + V(x(t)) \geq \frac{v^2(t)}{2} - h$$

e quindi

$$\dot{x}^2(t) = v^2(t) \leq 2(E + h).$$

Pertanto

$$|\dot{x}(t)| \leq 2(E + h) \quad \text{ed} \quad |x(t) - x(0)| \leq 2(E + h)|t|.$$

Quindi $x(t)$ è localmente limitata e, dal corollario 3.2.1, ne deduciamo che la soluzione è estendibile per tutti i tempi. ■

Chapter 4

Studio qualitativo delle soluzioni

Sono pochi i casi in cui le soluzioni di una equazione differenziale possono essere scritte analiticamente. Oltre al caso delle equazioni scalari sulla retta esaminato nel capitolo 2, studieremo alcune altre classi di equazioni che ammettono una formula risolutiva nella sezione 4.2. In ogni caso, quando anche ciò si possa fare, spesso la sua espressione non risulta particolarmente esplicativa del comportamento delle soluzioni.

Ciò che, invece, è veramente importante è descrivere il comportamento qualitativo delle soluzioni.

ESEMPIO Già sappiamo come integrare (addirittura "per quadrature") la equazione differenziale

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin(x) \\ x(0) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (4.1)$$

con i metodi del capitolo 2.

Vediamo come si possano ricavare subito tutte le informazioni qualitative importanti di tale soluzione. Intanto la soluzione $x(t)$ di (4.1) è definita per tutti i tempi dovendo essere $0 < x(t) < \pi$, $\forall t \in (T^-, T^+)$. Infatti $x(t) = 0$ e $x(t) = \pi$ sono due soluzioni di equilibrio e 2 soluzioni distinte non si possono intersecare per l'unicità delle soluzioni di ogni problema di Cauchy, essendo $\sin(x)$ una funzione Lipschitz (oppure, poichè $|\sin(x)| \leq 1$, dal teorema di estensione globale 3.2.1, si ricava che la soluzione è definita per tutti i tempi).

I limiti $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = l^\pm$ esistono essendo $x(t)$ monotona, e risulta che $\pi/2 < l^+ \leq \pi$, $0 \leq l^- < \pi/2$. Affermiamo che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \pi, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0. \quad (4.2)$$

Metodo 1). Se fosse $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = l^+ < \pi$ allora

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{x}(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \sin(x(t)) = \sin l^+ > 0$$

e, quindi, dalla definizione di limite, per un certo $\bar{t} > 0$ abbastanza grande, si avrebbe

$$\sin(x(t)) \geq \frac{\sin l^+}{2} \quad \forall t \geq \bar{t}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} x(t) &\geq x(\bar{t}) + \int_{\bar{t}}^t \dot{x}(\tau) d\tau \geq x(\bar{t}) + \int_{\bar{t}}^t \frac{\sin l^+}{2} d\tau \\ &\geq x(\bar{t}) + \frac{\sin l^+}{2}(t - \bar{t}) \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

per $t \rightarrow +\infty$, contraddicendo $x(t) < \pi$, $\forall t$.

Analogamente si dimostra che $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0$.

La situazione precedente si presenta spesso. Pertanto scriviamo il seguente teorema.

Teorema 4.0.3 (Teorema dell'asintoto) *Sia $x(t)$ una funzione di classe C^1 tale che esista*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = l \in \mathbf{R}$$

finito ed esista pure

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{x}(t) = \beta.$$

Allora $\beta = 0$.

DIMOSTRAZIONE. In ogni intervallo $(n, n + 1)$ esiste un punto ξ_n tale che

$$x(n + 1) - x(n) = \dot{x}(\xi_n)$$

per il teorema del valor medio. Poichè il primo membro tende a zero, lungo la successione $\xi_n \rightarrow +\infty$ si ha $\dot{x}(\xi_n) \rightarrow 0$ e quindi $\beta = 0$. ■

ESERCIZIO Dimostrare il teorema dell'asintoto anche come al metodo 1 del precedente esercizio e con il ragionamento seguente: sappiamo che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x(t)}{t} = 0$$

e che il limite del rapporto delle derivate $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}(t)$ esiste. Concludere dal teorema dell'Hopital.

ESERCIZIO Dimostrare la seguente generalizzazione del teorema dell'asintoto: se esiste finito il limite $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = l$, allora $\liminf_{t \rightarrow +\infty} |\dot{x}(t)| = 0$.

Metodo 2) per provare (4.2). Poichè sappiamo che esistono finiti entrambi i limiti

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = l^+ \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{x}(t) = \sin l^+,$$

applicando il teorema dell'asintoto si conclude $\sin l^+ = 0$, cioè $l^+ = \pi$. Analogamente si conclude che $l^- = 0$. Farlo per esercizio.

ESERCIZIO Sia $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ di classe C^1 . Provare che

$$\begin{cases} \dot{x} = e^{-[f(x)]^2} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

ha una ed una soluzione definita per tutti i tempi, provare che esistono i limiti

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = l^\pm$$

e calcolarli.

ESERCIZIO Studiare le soluzioni dell'equazione differenziale

$$\dot{x} = 1 - \log(t + x)$$

e tracciarne un grafico approssimativo. Si calcoli la soluzione e si confrontino le informazioni qualitative con la formula esplicita.

Suggerimento: si faccia il cambio di variabili $y := x + t$.

ESERCIZIO Sia $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f \in C^1$, crescente ed $f(0) = 0$. Provare che tutte le soluzioni sono definite in un intervallo del tipo $(-\infty, a)$. Si può ottenere la risposta con i metodi del capitolo 2?

Vediamo come si può procedere per campi non autonomi.

ESERCIZIO Si descriva qualitativamente la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{t - x}{1 + t^2 + x^2} \\ x(1) = 1. \end{cases} \quad (4.3)$$

La funzione $f(t, x)$ è C^∞ e quindi si ha esistenza ed unicità locale della soluzione di (4.3) in un intorno di $t = 0$. Poi

$$f(t, x) \text{ risulta } \begin{cases} < 0 & \text{per } x > t \\ = 0 & \text{per } t = x \\ > 0 & \text{per } x < t. \end{cases}$$

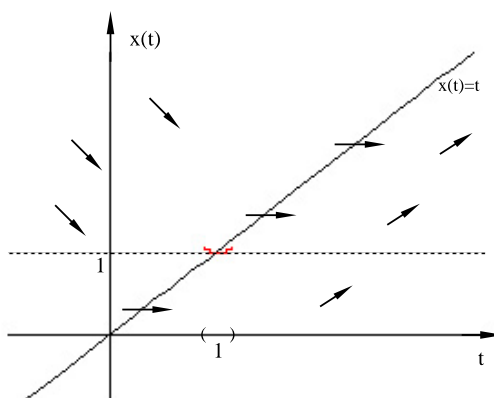


Figure 4.1: Il campo vettoriale di (4.3)

Sia (T^-, T^+) l'intervallo massimale di definizione di $x(t)$.

Step 1) Si ha che $1 < x(t) < t$ per tutti i tempi $t \in (1, T^+)$. Essendo $\dot{x}(t) > 0$, per $t > 1$, la $x(t)$ è monotona crescente per $t > 1$ e, quindi, $x(t) > 1$ per tutti i tempi $t \in (1, T^+)$.

Si dimostra per assurdo che $x(t) < t$ per tutti i tempi $t \in (1, T^+)$. Se no, l'insieme

$$E := \{t > 1 \mid x(t) \geq t\} \neq \emptyset$$

sarebbe non vuoto. Si consideri $\tau := \inf E$. Si ha $\tau > 1$ (perchè?), $x(\tau) = \tau$ (perchè?), e $x(t) < t$, $\forall t \in (1, \tau)$ (perchè?). Quindi

$$\frac{x(t) - x(\tau)}{t - \tau} > 1 \quad \forall t < \tau$$

e passando al limite $\dot{x}(\tau) \geq 1$. Questo è assurdo perchè $\dot{x}(\tau) = f(\tau, x(\tau)) = f(\tau, \tau) = 0$.

Step 2) Si conclude che $T^+ = +\infty$ applicando il corollario 3.2.1 (come?).

Step 3) Esiste $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$ essendo $x(t)$ monotona. Questo limite è infinito. Infatti, supponendo per assurdo che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = l < +\infty$$

si deduce dalla definizione di limite che, per un certo $\bar{t} > 0$ abbastanza grande,

$$\dot{x}(t) \geq \frac{t - 2l}{1 + t^2 + 4l^2} \quad \forall t \geq \bar{t}$$

ma

$$x(t) \geq x(\bar{t}) + \int_{\bar{t}}^t \dot{x}(\tau) d\tau \geq x(\bar{t}) + \int_{\bar{t}}^t \frac{t-2l}{1+t^2+4l^2} d\tau \rightarrow +\infty$$

per $t \rightarrow +\infty$, contraddicendo $x(t) \rightarrow l$.

Domanda: Può essere $x(t)$ asintotica ad $x(t) = t$ per $t \rightarrow \infty$?

Risposta: No. Dimostrarlo.

Consideriamo nel prossimo esempio un campo vettoriale non definito su tutto \mathbf{R}^2 .

ESERCIZIO Si descriva qualitativamente la soluzione di

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{e^t - x}{e^x + t} \\ x(0) = 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Il campo $f(t, x)$ è definito per $e^x + t \neq 0$. La soluzione $x(t)$ rimarrà nell'aperto $A := \{x > \ln(-t)\}$. In questo dominio abbiamo che $f(t, x)$ si annulla per $e^t = x$. Poi $f(t, x) > 0$ se $x < e^t$ ed $f(t, x) < 0$ se $x > e^t$.

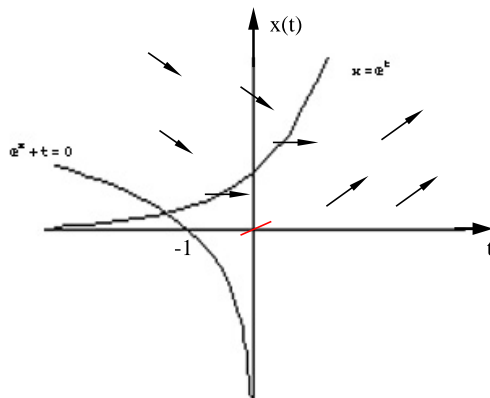


Figure 4.2: Il campo vettoriale di (4.4)

Step 1) Si ha che $1 < x(t) < e^t$ per tutti i tempi $t \in (1, T^+)$. Si dimostra con ragionamenti analoghi all'esercizio precedente. Farlo per esercizio. Quindi $T^+ = +\infty$ (perchè?).

Domanda: si potrebbe dedurre l'esistenza della soluzione $x(t)$ per tutti i tempi $(0, +\infty)$ dal teorema 3.2.2?

Step 2) Esiste $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$ essendo $x(t)$ monotona. Questo limite è infinito. Infatti, supponendo per assurdo che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = l < +\infty$$

si deduce dalla definizione di limite che, per un certo $\bar{t} > 0$ abbastanza grande,

$$\dot{x}(t) \geq \frac{e^t - 2l}{e^{2l} + t} \quad \forall t \geq \bar{t}$$

ma

$$x(t) \geq x(\bar{t}) + \int_{\bar{t}}^t \dot{x}(\tau) d\tau \geq x(\bar{t}) + \int_{\bar{t}}^t \frac{e^\tau - 2l}{e^{2l} + \tau} d\tau \rightarrow +\infty$$

per $t \rightarrow +\infty$, contraddicendo $x(t) \rightarrow l$. Un altro modo, anche più veloce, di procedere è come nella dimostrazione del teorema dell'asintoto:

$$x(n) - x(n+1) = \dot{x}(\xi_n)$$

per un qualche $\xi_n \in (n, n+1)$. Al limite per $n \rightarrow +\infty$ il primo membro tende a zero, mentre il secondo diverge. Assurdo

Step 3) $T^- > -\infty$ perchè altrimenti la $x(t)$ intersecherebbe necessariamente la curva $e^x + t = 0$ dove il campo non è definito. Si ha necessariamente

$$\lim_{t \rightarrow T^-} x(t) = \ln(-x(T^-)).$$

La soluzione smette di esistere perchè ha raggiunto la frontiera di A . Confronta con il teorema 3.1.4.

ESERCIZIO Si descriva qualitativamente la soluzione di

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{x} - t \\ x(1) = 1. \end{cases} \quad (4.5)$$

Suggerimenti:

Step 1) Si ha che $1/t < x(t) < 1$ per tutti i tempi $t \in (1, T^+)$. Quindi $T^+ = +\infty$.

Step 2) $T^- > -\infty$. Un modo per dimostrarlo è notare che, per monotonia,

$$x(t) < 1, \quad \forall t \in (T^-, 1),$$

e, derivando l'equazione,

$$\ddot{x}(t) = -\frac{\dot{x}(t)}{x^2(t)} - 1$$

da cui si deduce

$$\ddot{x}(t) \leq -1 \quad \forall t \in (T^-, 1).$$

Pertanto $x(t)$ è strettamente concava in $(T^-, 1)$ e, dalla formula di Taylor, $\forall t \in (T^-, 1)$,

$$\begin{aligned} x(t) &= x(1) + \dot{x}(1)(t-1) + \frac{1}{2}\ddot{x}(\xi)(t-1)^2 \\ &= 1 + \frac{1}{2}\ddot{x}(\xi)(t-1)^2 \leq 1 - \frac{1}{2}(t-1)^2 \end{aligned}$$

e quindi si trova anche la stima $T^- > 1 - \sqrt{2}$.

Si può ragionare anche per assurdo: se $T^- = -\infty$ allora la soluzione verificherebbe $0 < x(t) < 1$, $\forall t \in (-\infty, 1)$. Allora $\dot{x}(t) = (1/x(t)) - t \geq -t \rightarrow +\infty$ per $t \rightarrow -\infty$. Si concluda il ragionamento trovando un assurdo.

Il vantaggio del metodo precedente è che ci fornisce anche una stima per T^- .

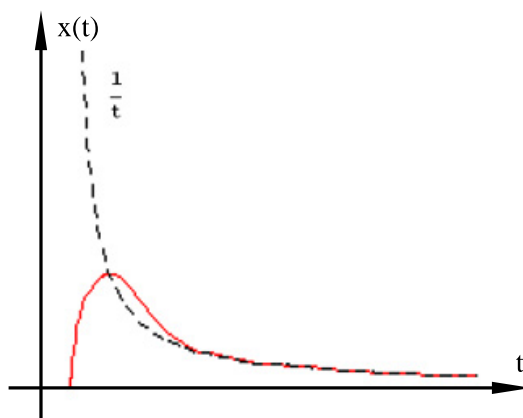


Figure 4.3: Il campo vettoriale di (4.5)

ESERCIZIO Si descriva qualitativamente la soluzione di

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - (\arctan t)^2 \\ x(1) = 0. \end{cases}$$

Si provi che è definita per tutti i tempi e si calcolino i limiti

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t).$$

Analogamente si studi la soluzione con condizione iniziale $x(0) = 0$. Si provi che quest'ultima soluzione è una funzione dispari del tempo.

4.1 Teoremi del confronto

Uno strumento molto efficace nell'analisi qualitativa di un problema di Cauchy è confrontare la soluzione di una equazione differenziale con un'altra che ci sceglieremo, di caso in caso, da essere più semplice da studiare.

Teorema 4.1.1 (Teorema del confronto) *Siano*

$$f_1, f_2 : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

due funzioni continue soddisfacenti

$$f_1(t, x) < f_2(t, x) \quad \forall (t, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}. \quad (4.6)$$

Consideriamo i due problemi di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = f_2(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

e chiamiamo $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ due rispettive soluzioni.

Allora risulta

$$\begin{cases} \varphi_1(t) < \varphi_2(t), & \forall t > t_0 \\ \varphi_1(t) > \varphi_2(t), & \forall t < t_0. \end{cases} \quad (4.7)$$

Osservazione 4.1.1 *Il teorema del confronto afferma una cosa ovvia: se 2 signori si trovano in un istante t_0 nello stesso posto x_0 ed il primo signore va sempre più lento del secondo signore, egli rimarrà sempre più indietro rispetto al primo signore per $t > t_0$. Invece, per $t < t_0$, lui stava sempre davanti al secondo signore.*

DIMOSTRAZIONE. Proviamo il teorema per $t > t_0$. Supponiamo per assurdo che l'insieme

$$E := \{t > t_0 : \varphi_2(t) \leq \varphi_1(t)\}$$

sia non vuoto. Consideriamone $\tau := \inf E$. Si ha che $\tau > t_0$ (perchè ?), $\varphi_1(\tau) = \varphi_2(\tau) =: \bar{x}$ (perchè ?), $\varphi_1(t) < \varphi_2(t)$ per $t < \tau$ (perchè ?).

Allora i rapporti incrementali verificano

$$\frac{\varphi_2(t) - \varphi_2(\tau)}{t - \tau} < \frac{\varphi_1(t) - \varphi_1(\tau)}{t - \tau}, \quad t < \tau$$

e, passando al limite,

$$\dot{\varphi}_2(\tau) \leq \dot{\varphi}_1(\tau).$$

Ma questo è assurdo perchè

$$\dot{\varphi}_2(\tau) = f_2(\tau, \bar{x}) > f_1(\tau, \bar{x}) = \dot{\varphi}_1(\tau).$$

■

Vi sono tante varianti del teorema del confronto. Dimostriamo ad esempio

Teorema 4.1.2 (Teorema del confronto) *Supponiamo che f_1, f_2 siano funzioni Lipschitziane. Se in (4.6) si sostituisce il simbolo $<$ con \leq , vale lo stesso risultato del teorema del confronto 4.1.1, sostituendo in (4.7) il segno $<$ (risp. $>$) con \leq (risp. \geq).*

DIMOSTRAZIONE 1. Si consideri la successione di campi vettoriali

$$f_n(t, x) := f_2(t, x) + \frac{1}{n}$$

e la successione $\varphi_n(t)$ delle soluzioni di

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_n = f_n(t, \varphi_n(t)) \\ \varphi_n(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Essendo $f_n(t, x) > f_1(t, x)$ ed $f_n(t, x) < f_{n-1}(t, x)$ una successione di funzioni strettamente decrescente, per il teorema del confronto 4.1.1 si ha

$$x_1(t) < \dots < \varphi_n(t) < \dots < \varphi_1(t). \quad (4.8)$$

La successione di funzioni $\varphi_n(t)$ converge puntualmente ad una funzione $\bar{\varphi}(t) \geq x_1(t)$ per monotonia. Inoltre, passando al limite in

$$\varphi_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi_n(\tau)) d\tau$$

si deduce

$$\bar{\varphi}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \bar{\varphi}(\tau)) d\tau.$$

Notiamo che possiamo passare il limite dentro il segno di integrale poichè la successione di funzioni $f(\tau, \varphi_n(\tau))$ è limitata in $[t_0, t]$ da (4.8). Per unicità (essendo f_2 Lipschitziana) abbiamo che $\bar{\varphi}$ coincide con la soluzione x_2 e, quindi,

$$x_2(t) = \bar{\varphi}(t) \geq x_1(t).$$

DIMOSTRAZIONE 2 La funzione $w(t) := x_1(t) - x_2(t)$ soddisfa

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &= \dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t) = f_1(t, x_1(t)) - f_2(t, x_2(t)) \\ &\leq L|x_1(t) - x_2(t)| = L|w(t)| \end{aligned} \quad (4.9)$$

ed $w(t_0) = x_1(t_0) - x_2(t_0) = 0$.

Ne deduciamo che $w(t) \leq 0, \forall t \geq t_0$. Se non fosse così, consideriamo l'insieme non vuoto

$$F := \{t \geq t_0 : w(t) > 0\}$$

ed $\tau := \inf F$. Si ha, ragionando come al solito, $w(\tau) = 0$ e $w(t) > 0$ per $t > t_0$. Ma, allora, da (4.9),

$$\dot{w}(t) \leq Lw(t)$$

e, quindi,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(e^{-Lt}w(t)) &= -Le^{-Lt}w(t) + e^{-Lt}\dot{w}(t) \\ &\leq -Le^{-Lt}w(t) + e^{-Lt}Lw(t) = 0 \end{aligned}$$

Essendo $w(\tau) = 0$ si deduce la contraddizione $w(t) \leq 0$ per $t > t_0$. ■

ESERCIZIO Consideriamo i due problemi di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{|x|} \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = 2\sqrt{|x|} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

e chiamiamo $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ due rispettive soluzioni. Naturalmente il campo vettoriale $\sqrt{|x|} \leq 2\sqrt{|x|}$. Possiamo concludere che risulta

$$\varphi_1(t) \leq \varphi_2(t), \quad \forall t > 0?$$

RISPOSTA: NO. Questo indica che non basta la sola ipotesi di continuità dei campi vettoriali f_1 ed f_2 per la validità del teorema del confronto 4.1.2.

ESERCIZIO Sia $x \in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ tale che

$$\dot{x}(t) \geq \frac{1}{1 + (x(t))^2}.$$

Provare che $x(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$.

Utilizzando il tipo di ragionamento esposto precedentemente provare per esercizio le seguenti formulazioni:

Teorema 4.1.3 (Teorema del confronto) *Siano $f_1, f_2 : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ due funzioni Lipschitziane soddisfacenti $f_1(t, x) \leq f_2(t, x)$, $\forall (t, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Consideriamo i due problemi di Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(t, x) \\ x(t_0) = x_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = f_2(t, x) \\ x(t_0) = x_2 \end{cases}$$

con $x_1 < x_2$ e chiamiamo $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ le due rispettive soluzioni. Allora risulta

$$\varphi_1(t) < \varphi_2(t), \quad \forall t > t_0.$$

DOMANDA Basterebbe l'ipotesi di sola continuità di f_1, f_2 per avere la stessa conclusione?

Teorema 4.1.4 (Diseguazione differenziale) *Sia $f(t, x)$ una funzione Lipschitziana e sia $\varphi(t)$ una funzione C^1 soddisfacente*

$$\begin{cases} \dot{\varphi}(t) < f(t, \varphi(t)) \\ \varphi(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (4.10)$$

(si dice che φ è una sottosoluzione). Allora risulta

$$\varphi(t) < x(t), \quad \forall t > t_0 \quad (4.11)$$

dove $x(t)$ è la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Cosa si può concludere per $t < t_0$?

Se in (4.10) si sostituisce il $<$ con \leq provare che in (4.11) si deve sostituire il $<$ con il \leq .

Applichiamo questi argomenti nello studio qualitativo di un problema di Cauchy.

ESERCIZIO Si descriva qualitativamente la soluzione di

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + t^2 \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Dimostrare, in particolare, che $T^+ \in (\pi/4, 1)$. Dimostrare inoltre che $T^- > -\infty$.

Suggerimenti: $x(t)$ è sempre monotona. Confrontando con la soluzione di

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ x(0) = 1, \end{cases}$$

che è $x(t) = 1/(1-t)$, si prova che $T^+ < 1$. Poi confrontando, per $0 \leq t < T^+ < 1$, con la soluzione di

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + 1 \\ x(0) = 1, \end{cases}$$

che è $x(t) = \tan(\pi/4 + t)$, si prova che $T^+ > \pi/4$.

Per $t < 0$, confrontando con la soluzione di

$$\begin{cases} \dot{x} = t^2 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

che è $x(t) = 1 + (t^3/3)$ si prova che $x(t) < 1 + (t^3/3)$ per tutti $t \in (T^-, 1)$. In particolare esiste un t^* in cui $x(t^*) = -1$. Allora si confronti con la soluzione di

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ x(t^*) = -1 \end{cases}$$

per provare che $T^- > -\infty$.

ESERCIZIO Sia $f(t, x)$ una funzione di classe $C^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ tale che $f(t, 0) = 0$, $\forall t$, ed

$$(\partial_x f)(t, x) \leq -h, \quad \forall (t, x) \in \mathbf{R}^2$$

per un qualche $h > 0$. Dimostrare che tutte le soluzioni di $\dot{x} = f(t, x)$ decadono a zero per $t \rightarrow +\infty$ almeno esponenzialmente.

Soluzione: Per $x > 0$, dal teorema del valor medio, esiste $\xi \in (0, x)$ tale che

$$f(t, x) = f(t, 0) + (\partial_x f)(t, \xi)x = (\partial_x f)(t, \xi)x \leq -hx$$

mentre, per $x < 0$,

$$f(t, x) = f(t, 0) + (\partial_x f)(t, \xi)x \geq -hx.$$

La funzione $x(t) = 0$ è soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = f(t, x)$ e, quindi, ogni soluzione $x(t)$ non nulla di $\dot{x} = f(t, x)$ è o sempre positiva o sempre negativa (esistenza ed unicità locale di tutte le soluzioni essendo $f \in C^1$).

Consideriamo ad esempio ogni soluzione di

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

con $x_0 > 0$. Essa sarà sempre positiva e, confrontandola con la soluzione dell'equazione

$$\begin{cases} \dot{x} = -hx \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

otteniamo dal teorema del confronto che

$$0 < x(t) < x_0 e^{-h(t-t_0)} \quad \forall t > t_0.$$

Si faccia per esercizio il ragionamento se $x_0 < 0$.

ESERCIZIO Se, in aggiunta alle ipotesi precedenti, si assume che

$$(\partial_x f)(t, x) \geq -k, \quad \forall (t, x) \in \mathbf{R}^2$$

per un qualche $k > 0$, allora tutte le soluzioni di $\dot{x} = f(t, x)$ non decadono a zero più rapidamente di un esponenziale per $t \rightarrow +\infty$.

Conviene fare pratica di questi ragionamenti su vari esercizi.

ESERCIZIO Disegnare la soluzione di

$$\begin{cases} \dot{x} = \log(x) - t \\ x(1) = e. \end{cases}$$

Si provi in particolare che è definita in $(-\infty, T^+)$ con $T^+ < +\infty$ e si stimi T^+ (per questo può essere utile osservare che $\ddot{x}(t) \leq -1$ per $t \in (1, T^+)$). Si calcoli $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t)$.

ESERCIZIO Disegnare la soluzione di

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{(1+t^2)^2} - x^2 \\ x(0) = a \end{cases}$$

al variare della condizione iniziale a .

ESERCIZIO Sia $f \in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ una funzione dispari (i.e. $f(-x) = -f(x)$, $\forall x$), con $f'(x) > 0$, e con $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l < +\infty$.

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(tx) \\ x(0) = a \end{cases}$$

al variare della condizione iniziale a .

Provare che: (i) la soluzione è definita per tutti i tempi. (ii) $\dot{x}(t) > 0$ per $t > 0$. (iii) $x(t)$ è pari. (iv) $x(t) \geq a$, $\forall t \in \mathbf{R}$. (v) $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = l$.

4.2 Soluzioni esplicite

4.2.1 Equazioni a variabili separabili

Una classe di equazioni che ammettono una soluzione esplicita sono le *equazioni a variabili separabili* quali

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t)g(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

che abbiamo già studiato se $f(t) \equiv 1$ al capitolo 2.

Anche qui conviene distinguere i punti dove $g(x) = 0$. Se infatti $g(x_0) = 0$, allora la funzione costante $x(t) = x_0, \forall t$, è una soluzione. Se, invece, $g(x_0) \neq 0$, allora almeno localmente posso dividere per $g(x)$ e quindi

$$\int_{t_0}^t \frac{\dot{x}(\tau)}{g(x(\tau))} d\tau = \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau$$

da cui, cambiando variabile $y = x(t)$ (perché è un buon cambio di variabili?)

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dy}{g(y)} = \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau. \quad (4.12)$$

Calcolando gli integrali ed invertendo la funzione $z \rightarrow \int_{x_0}^z \frac{dy}{g(y)}$ si ottiene la espressione di $x(t)$.

Per interpretare correttamente il risultato conviene sempre integrare la espressione analitica con le argomentazioni qualitative della sezione precedente. Se, ad esempio, $x_1 < x_0 < x_2$ dove $g(x_1) = g(x_2) = 0$, e $g(x)$ è una funzione Lipschitz, allora la soluzione $x(t)$ sarà confinata per tutti i tempi tra $x_1 < x(t) < x_2$ (perché?). Quindi $x(t)$ esiste per tutti i tempi (perché?). Poi se $g(x) \neq 0, \forall x \in (x_1, x_2)$, allora la soluzione $x(t)$ tenderà a x_1 o a x_2 per $t \rightarrow \pm\infty$ (a seconda del segno di $g(x)$ in (x_1, x_2)).

In sintesi, per capire bene la formula (4.12) bisogna sempre fare l'analisi qualitativa della soluzione.

ESERCIZIO Disegnare la soluzione di

$$\begin{cases} \dot{x} = t^2 \cos x \\ x(0) = 0. \end{cases} \quad (4.13)$$

Si provi in particolare che $x(t)$ è definita per tutti i tempi e si calcolino i $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t)$. Si dimostri che $x(t)$ è dispari.

Infine scrivere esplicitamente la soluzione analitica mediante la tecnica di separazione delle variabili.

SOLUZIONE Il campo $f(t, x) := t^2 \cos x$ è di classe $C^\infty(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$. Si ha pertanto esistenza ed unicità locale di tutti i problemi di Cauchy. Inoltre $x(t) = -\pi/2$ e $x(t) = \pi/2$ sono 2 soluzioni dell'equazione differenziale, e, quindi, la soluzione $x(t)$ del problema (4.13) soddisfa la stima a priori $-\pi/2 < x(t) < \pi/2, \forall t \in (T^-, T^+)$. Pertanto $x(t)$ è prolungabile per tutti i tempi (si può anche osservare che $|f(t, x)| \leq t^2$ ed applicare il teorema di esistenza globale delle soluzioni su \mathbf{R}).

La funzione $f(t, x) > 0$ per $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ e $t \neq 0$. Pertanto $x(t)$ è monotona crescente e, dal teorema dell'asintoto (con ragionamenti oramai noti), si ricava $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = \pm\pi/2$.

Dimostriamo che $x(t)$ è una funzione dispari. Infatti la funzione $y(t) := -x(-t)$ soddisfa la stessa equazione differenziale

$$\dot{y}(t) = \dot{x}(-t) = (-t)^2 \cos x(-t) = t^2 \cos y(t)$$

con la medesima condizione iniziale $y(0) = -x(0) = 0$. Quindi $y(t)$ soddisfa lo stesso problema di Cauchy (4.13) e, per l'unicità, $y(t) \equiv x(t)$, cioè $-x(-t) = x(t)$, $\forall t$, i.e. $x(t)$ è dispari.

Infine, essendo (4.13) a variabili separabili troviamo che $x(t)$ soddisfa

$$\int_0^{x(t)} \frac{dy}{\cos(y)} = \int_0^t \tau^2 d\tau = \frac{t^3}{3}.$$

Si può calcolare esplicitamente $\int_0^x \frac{dy}{\cos(y)}$ e trovare $x(t)$ in forma implicita. Farlo per esercizio. Questo esempio mostra come la formula analitica della soluzione possa essere di scarsa utilità.

DOMANDA: Definendo la funzione

$$\Psi(z) := \int_0^z \frac{dy}{\cos(y)}$$

quanto valgono i $\lim_{z \rightarrow \pm\pi/2} \Psi(z)$? Che rilevanza dinamica hanno questi limiti?

ESERCIZIO Disegnare le soluzioni di

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{x t}{1+t^2} \\ x(0) = a. \end{cases}$$

Si dimostri che sono funzioni pari. Si trovi la espressione esplicita della soluzione.

ESERCIZIO Dire se le soluzioni di

$$\dot{x} = -\frac{t^2}{1+x^2}$$

sono definite per tutti i tempi. Si trovi il comportamento asintotico della soluzione per $t \rightarrow +\infty$. Si trovi la espressione esplicita della soluzione.

4.2.2 Equazioni esatte

Un'altra classe di equazioni che si possono integrare esplicitamente è quella delle equazioni *esatte*, cioè della forma

$$\dot{x} = -\frac{M(t, x)}{N(t, x)} \quad (4.14)$$

dove il campo vettoriale piano $(M(t, x), N(t, x))$ è conservativo, ossia esiste una funzione potenziale $W : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ tale che

$$M(t, x) = \partial_t W(t, x), \quad N(t, x) = \partial_x W(t, x).$$

(equivalentemente si dice che la 1-forma differenziale

$$\omega := M(t, x)dt + N(t, x)dx$$

è esatta). In questo caso le curve integrali stanno nelle linee di livello di W essendo $W(t, x(t)) = \text{costante}$ lungo la soluzione. Infatti

$$\frac{d}{dt}W(t, x(t)) = \partial_t W + \partial_x W \dot{x} = M(t, x) - N(t, x) \frac{M(t, x)}{N(t, x)} = 0.$$

Per verificare che $(M(t, x), N(t, x))$ sia conservativo, è sufficiente, in una regione semplicemente connessa del dominio di $f(t, x) := -M(t, x)/N(t, x)$, che le derivate parziali miste siano uguali

$$\partial_x M = \partial_t N \quad (4.15)$$

(lemma di Poincaré). La (4.15) dice che il rotore di $(M(t, x), N(t, x))$ è nullo o, equivalentemente, che ω è chiusa.

ESEMPIO La equazione

$$\dot{x} = \frac{e^{2t} - tx^2}{t^2x}$$

è esatta, essendo $\partial_x M = 2tx = \partial_t N$. Il potenziale è

$$W(t, x) = \frac{1}{2}(t^2x^2 - e^{2t}) + \text{costante}.$$

Equazioni scritte nella forma (4.14) emergono naturalmente nello studio di sistemi di equazioni differenziali autonomi nel piano

$$\begin{cases} \dot{x} = A(x, y) \\ \dot{y} = B(x, y) \end{cases} \quad (4.16)$$

che vedremo meglio al capitolo 7. La soluzione di (4.16) è una curva $t \rightarrow (x(t), y(t)) \in \mathbf{R}^2$. La equazione per le traiettorie di questo campo è, almeno localmente dove sono queste orbite sono esplicitabili come un grafico $y(x)$ (cioè dove $A(x, y) \neq 0$),

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{B(x, y)}{A(x, y)}$$

che è della forma (4.14). Si scrive anche così

$$A(x, y)dy - B(x, y)dx = 0$$

che è una scrittura preferibile in quanto non si richiede che le traiettorie siano esplicitabili come grafici in x (o in y).

ESEMPIO Trovare le traiettorie del sistema differenziale

$$\begin{cases} \dot{x} = bx + cy \\ \dot{y} = -ax - by. \end{cases} \quad (4.17)$$

dove a, b, c sono costanti. La equazione per le traiettorie si scrive

$$(ax + by)dx + (bx + cy)dy = 0$$

il cui potenziale è

$$W(x, y) = \frac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2) + \text{costante}.$$

Le traiettorie sono dunque un fascio di coniche omotetiche. Impareremo a studiare in modo più naturale un sistema lineare come (4.17) nella sezione 5.5.

ESERCIZIO Provare che $W(x, y)$ è un integrale primo del sistema (4.17).

ESERCIZIO Provare che tutte le soluzioni del sistema (4.17) esistono per tutti i tempi.

Talvolta per ottenere una equazione esatta basta moltiplicare numeratore e denominatore per una funzione $\mu(t, x)$ detto “fattore integrante”.

ESEMPIO Disegnare la soluzione di

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + 3x \tan t \\ x(0) = 0. \end{cases} \quad (4.18)$$

Si provi in particolare che è definita in $(-\pi/2, \pi/2)$ e si calcolino $\lim_{t \rightarrow \pm\pi/2} x(t)$. Si provi che $x(t)$ è dispari.

Si scriva la soluzione analitica della soluzione.

SOLUZIONE La funzione $f(t, x) := 1 + 3x \tan t$ è di classe C^∞ per $(t, x) \in (-\pi/2, \pi/2) \times \mathbf{R}$ e soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza globale. Quindi esiste una unica soluzione $x(t)$ di (4.18) definita per $t \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Si ha $\dot{x}(0) = 1$ e, quindi, almeno localmente vicino a $t = 0$, se $t > 0$ la soluzione è positiva, mentre, se $t < 0$, la soluzione è negativa. Inoltre la funzione $f(t, x) > 0$ è positiva nella regione $(0, \pi/2) \times \mathbf{R}$ e nella regione $(-\pi/2, 0) \times \mathbf{R}$.

Si deduce che $x(t)$ è monotona su $(-\pi/2, \pi/2)$ e

$$\lim_{t \rightarrow -\pi/2} x(t) = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow +\pi/2} x(t) = +\infty.$$

Verifichiamo, ad esempio, il secondo limite. Poiché $\dot{x}(t) \geq 1$, si deduce che $x(t) \geq t$ per $t > 0$. Poi

$$x(t) = x(1) + \int_1^t \dot{x}(\tau) d\tau \geq 1 + \int_1^t (1 + \tan \tau) d\tau \rightarrow +\infty$$

per $t \rightarrow +\infty$.

Per calcolare esplicitamente la soluzione scriviamo

$$\dot{x}(t) = 1 + 3x \tan t = -\frac{-(\cos t + 3x \sin t)}{\cos t}.$$

Questa equazione non è esatta. Ma, moltiplicando per $\cos^2 t$ (fattore integrante) numeratore e denominatore, otteniamo

$$\dot{x}(t) = -\frac{-(\cos t + 3x \sin t) \cos^2 t}{\cos^3 t} = -\frac{M(t, x)}{N(t, x)}$$

che è esatta, essendo

$$\partial_x M = -3 \sin t \cos^2 t = \partial_t N.$$

Un potenziale è

$$W(t, x) = x \cos^3 t - \sin t + \frac{\sin^3 t}{3}$$

e, tutte le soluzioni dell'equazione differenziale sono descritte da $W(t, x) = c$ al variare di $c \in \mathbf{R}$.

Il valore della costante c è determinato dalla condizione iniziale $x(0) = 0$, ossia

$$W(t, x) = W(0, 0) = 0.$$

In conclusione la soluzione di (4.18) risulta

$$x(t) = \frac{-(1/3) \sin^3 t + \sin t}{\cos^3 t}.$$

Verificare, per esercizio, le informazioni qualitative sulla soluzione che avevamo trovato precedentemente.

4.2.3 Equazioni omogenee

Un'altra classe di equazioni che può essere integrata esplicitamente è formata dalle equazioni omogenee. Consideriamo ad esempio

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (4.19)$$

dove il campo vettoriale $f(t, x)$ è una funzione omogenea di grado 0

$$f(t, x) = f(\lambda t, \lambda x), \quad \forall \lambda > 0.$$

In questo caso riusciamo a risolvere l'equazione (4.19) sfruttandone la simmetria: notiamo che se $x(t)$ è una soluzione, allora, la soluzione "omotetica" $\lambda x(t/\lambda)$ è una soluzione per ogni $\lambda \neq 0$. Sotto il cambio di variabili

$$y := \frac{x}{t}$$

la equazione diventa

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \frac{t\dot{x} - x}{t^2} = \frac{tf(t, x) - x}{t^2} = \frac{tf(1, x/t) - x}{t^2} = \frac{tf(1, y) - x}{t^2} \\ &= \frac{f(1, y) - y}{t} \end{aligned}$$

che è a variabili separabili.

ESERCIZIO Si disegni la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{t^2 + x^2}{tx} \\ x(1) = 1. \end{cases}$$

Si trovi la espressione esplicita della soluzione.

Procedendo come sopra dobbiamo risolvere

$$\begin{cases} \dot{y} = \frac{1}{ty} \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

da cui

$$y^2 = 2 \ln t + 1$$

e, quindi,

$$x(t) = t\sqrt{2 \ln t + 1}.$$

4.3 Esercizi di ricapitolazione

In conclusione di questo capitolo si possono fare i seguenti esercizi:

ESERCIZIO Si dimostri che una soluzione dell'equazione

$$\dot{x} = -x(x^2 + t)$$

non può assumere valori di segno opposto.

ESERCIZIO Disegnare la soluzione $x(t)$ di

$$\begin{cases} \dot{x} = t^2 + x^2 - 1 \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Si dimostri, in particolare, che $x(t)$ non è definita per tutti i tempi e che è una funzione dispari.

ESERCIZIO Studiare le soluzioni dell'equazione differenziale

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin(x - t) \\ x(0) = a \end{cases}$$

e tracciarne un grafico approssimativo.

ESERCIZIO Dimostrare che esiste una unica soluzione su \mathbf{R} di

$$\begin{cases} \dot{x} = e^{-x^2} + \arctan |t| \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Mostrare che $x(t)$ è dispari. Mostrare che esistono $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t)$ e calcolarli.

ESERCIZIO Disegnare la soluzione di

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{x^2}{1 - tx} \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

ESERCIZIO Si disegni la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{x}{t} + \frac{x^2}{t^2} \\ x(1) = 1. \end{cases}$$

Si trovi la espressione esplicita della soluzione.

ESERCIZIO Studiare qualitativamente le soluzioni dell'equazione

$$\dot{x} = \arctan\left(\lambda \frac{x}{t}\right)$$

per $\lambda = 4/\pi$. In particolare si dimostri che le soluzioni esistono per ogni $t > 0$ e che sono limitate. Ci si ponga lo stesso problema per $\lambda = 1$.

Chapter 5

Equazioni lineari

Una classe di equazioni differenziali per cui c'è una teoria sufficientemente sviluppata è costituita dalle equazioni differenziali lineari

$$\dot{x} = A(t)x + b(t), \quad x \in \mathbf{R}^n$$

dove $A(t)$ è una matrice $n \times n$.

5.1 Equazioni omogenee

Una equazione differenziale della forma

$$\dot{x} = A(t)x \tag{5.1}$$

si dice lineare omogenea.

Assumiamo che

$$A(\cdot) := (\alpha, \beta) \rightarrow \text{Mat}(n \times n)$$

sia una funzione continua. Allora, per il teorema di esistenza globale 3.2.1, tutte le soluzioni di (5.1) sono definite per tutto (α, β) . In particolare, se $A(t)$ è definita e continua su tutto \mathbf{R} tutte le soluzioni di (5.1) sono prolungabili indefinitamente.

Il teorema fondamentale della teoria delle equazioni lineari è il seguente.

Teorema 5.1.1 *L'insieme delle funzioni*

$$X := \left\{ \varphi : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbf{R}^n, \text{ soluzioni di (5.1)} \right\}$$

è uno spazio vettoriale di dimensione n .

Fissato un istante arbitrario $t \in (\alpha, \beta)$, la mappa $B_t : X \rightarrow \mathbf{R}^n$ definita da

$$B_t(\varphi) := \varphi(t), \quad \forall \varphi \in X$$

è un isomorfismo tra X ed \mathbf{R}^n .

DIMOSTRAZIONE. Se $\varphi_1, \varphi_2 \in X$, cioè

$$\dot{\varphi}_1 = A(t)\varphi_1, \quad \dot{\varphi}_2 = A(t)\varphi_2,$$

si deduce che

$$\frac{d}{dt}(\varphi_1 + \varphi_2) = \dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2 = A(t)\varphi_1 + A(t)\varphi_2 = A(t)(\varphi_1 + \varphi_2),$$

cioè $\varphi_1 + \varphi_2 \in X$.

Analogamente si verifica che se $\varphi \in X$ allora $\lambda\varphi \in X, \forall \lambda \in \mathbf{R}$. Questo è il “principio di sovrapposizione degli effetti” per le equazioni lineari.

Proviamo adesso che, fissato un istante $t \in (\alpha, \beta)$ arbitrario, la mappa $B_t : X \rightarrow \mathbf{R}^n$ è un isomorfismo. Questo implica, in particolare, che X ha dimensione n .

La mappa B_t è ovviamente lineare, poichè per $\varphi_1, \varphi_2 \in X, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$, si ha

$$\begin{aligned} B_t(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2) &= (\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2)(t) \\ &= \lambda_1\varphi_1(t) + \lambda_2\varphi_2(t) \\ &= \lambda_1 B_t(\varphi_1) + \lambda_2 B_t(\varphi_2). \end{aligned}$$

(i) B_t è suriettiva. Infatti, dal teorema di Cauchy, per ogni $y \in \mathbf{R}^n$ esiste una soluzione φ di (5.1) soddisfacente il dato iniziale $\varphi(t) = y$.

(ii) B_t è iniettiva. Infatti, dal teorema di Cauchy, se φ_1, φ_2 sono soluzioni di (5.1) con $B_t(\varphi_1) = B_t(\varphi_2)$, cioè con $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$, allora φ_1 e φ_2 coincidono per tutti i tempi (unicità della soluzione del problema di Cauchy). ■

Corollario 5.1.1 *Ogni soluzione φ di (5.1) è combinazione lineare di n soluzioni linearmente indipendenti, $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ di (5.1), cioè*

$$\varphi = \lambda_1\varphi_1 + \dots + \lambda_n\varphi_n$$

per opportuni $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{R}$.

DIMOSTRAZIONE. n soluzioni linearmente indipendenti, $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ di (5.1) formano una base nello spazio vettoriale n -dimensionale X . ■

Corollario 5.1.2 *n soluzioni $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ di (5.1) sono linearmente indipendenti in X se e solo se, ad ogni istante $t \in (\alpha, \beta)$, i vettori*

$$\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t) \in \mathbf{R}^n$$

sono linearmente indipendenti in \mathbf{R}^n .

DIMOSTRAZIONE. Per ogni t , la mappa B_t è un isomorfismo tra X ed \mathbf{R}^n .

■

ESEMPIO La generica soluzione della equazione lineare omogena scalare

$$\dot{x} = a(t)x, \quad x \in \mathbf{R}$$

è data (applicando il metodo della separazione delle variabili) da

$$x(t) = \lambda e^{\int_0^t a(\tau) d\tau}, \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

La soluzione $\varphi(t) := e^{\int_0^t a(\tau) d\tau}$ è una base di X .

Definizione 5.1.1 Date n soluzioni $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ di (5.1) il determinante

$$W(t) := \det M(t) \in \mathbf{R}$$

della matrice

$$M(t) := (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \in \text{Mat}(n \times n) \quad (5.2)$$

si chiama “determinante Wronskiano”.

Dal Corollario 5.1.2 segue che, se le soluzioni $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ di (5.1) sono linearmente indipendenti, allora il Wronskiano $W(t)$ è diverso da zero per tutti i tempi t . In questo caso, la matrice $M(t)$ definita in (5.2) si chiama “matrice fondamentale”. Se, invece, le soluzioni $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sono linearmente dipendenti, allora $W(t) \equiv 0, \forall t$.

La matrice

$$M(t) := (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \in \text{Mat}(n \times n)$$

soddisfa l’equazione differenziale

$$\frac{d}{dt} M(t) = A(t)M(t).$$

Infatti,

$$\begin{aligned} \dot{M}(t) &= (\dot{\varphi}_1(t), \dots, \dot{\varphi}_n(t)) = (A(t)\varphi_1(t), \dots, A(t)\varphi_n(t)) \\ &= A(t)(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) = A(t)M(t). \end{aligned}$$

Definizione 5.1.2 La matrice $M(t)$ soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{M}(t) = A(t)M(t) \\ M(0) = \text{Id} \end{cases} \quad (5.3)$$

si chiama la matrice risolvete di (5.1).

Notiamo che

$$M(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$$

dove φ_i sono le soluzioni dei problemi di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_i(t) = A(t)\varphi_i \\ \varphi_i(0) = e_i \end{cases}$$

ed $e_i \in \mathbf{R}^n$ è l' i -esimo elemento della base standard di \mathbf{R}^n .

Il motivo per cui la matrice $M(t)$ soluzione dell'equazione matriciale (5.3) si chiama matrice risolvete è fornito dal seguente corollario

Corollario 5.1.3 *La soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

si scrive $x(t) = M(t)x_0$, dove $M(t)$ è la soluzione di (5.3).

Le trasformazioni lineari

$$M(t) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$$

sono, $\forall t$, isomorfismi.

La famiglia di trasformazioni $M(t)$, $t \in \mathbf{R}$, sono dette il “flusso” dell'equazione lineare (5.1) poichè trasformano il dato iniziale x_0 nell'evoluto $x(t) = M(t)x_0$ al tempo t .

5.2 Equazioni non-omogenee

Una equazione differenziale della forma

$$\dot{x} = A(t)x + b(t) \tag{5.4}$$

si dice lineare non-omogenea.

Assumendo che

$$A(\cdot) := (\alpha, \beta) \rightarrow \text{Mat}(n \times n), \quad b(\cdot) : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbf{R}^n$$

siano funzioni continue, per il teorema di esistenza globale 3.2.1, tutte le soluzioni di (5.4) sono definite su tutto (α, β) .

Il teorema fondamentale è il seguente.

Teorema 5.2.1 *L'insieme delle funzioni*

$$Y := \left\{ \varphi : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbf{R}^n, \text{ soluzioni di (5.4)} \right\}$$

è uno spazio affine, cioè

$$Y = x_p + X$$

dove x_p è una soluzione particolare di (5.4) ed X è lo spazio vettoriale delle soluzioni della equazione omogenea associata (5.1).

DIMOSTRAZIONE. Ogni funzione della forma $x_p + \varphi$ con $\varphi \in X$ soluzione di $\dot{\varphi} = A(t)\varphi$, è una soluzione di (5.4), poichè

$$\frac{d}{dt}(x_p + \varphi) = \dot{x}_p + \dot{\varphi} = A(t)x_p + b(t) + A(t)\varphi = A(t)(x_p + \varphi) + b(t).$$

Viceversa, se x è una soluzione di (5.4), la funzione differenza $x - x_p$ appartiene ad X , poichè soddisfa la equazione omogenea associata (5.1):

$$\frac{d}{dt}(x - x_p) = \dot{x} - \dot{x}_p = (A(t)x + b) - (A(t)x_p + b) = A(t)(x - x_p).$$

■

ESEMPIO Si trovi la soluzione del problema di Cauchy della equazione differenziale non omogenea

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{x}{t} + t^2 \\ x(1) = 2. \end{cases} \quad (5.5)$$

La soluzione generale della equazione omogenea associata è data da

$$x(t) = \lambda t, \quad t \neq 0, \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

Cerchiamo una soluzione particolare di (5.5) della forma $x_p(t) = \alpha t^3$ per qualche $\alpha \in \mathbf{R}$ da trovare. Abbiamo che

$$\dot{x}_p(t) = 3\alpha t^2 = \frac{x_p}{t} + t^2 = \alpha t^2 + t^2$$

se e solo se $\alpha = 1/2$. Pertanto la soluzione generale della equazione non-omogenea è data da

$$x(t) = \frac{1}{2}t^3 + \lambda t, \quad t \neq 0, \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

La condizione iniziale $x(1) = 2$ problema di Cauchy è soddisfatta se $2 = (1/2) + \lambda$, cioè per $\lambda = 3/2$. In conclusione, la soluzione del problema di Cauchy (5.5) è data da

$$x(t) = \frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t, \quad t > 0$$

(domanda: perchè solo per $t > 0$?)

Un procedimento generale per trovare una soluzione particolare è dato dal metodo di “variazione delle costanti arbitrarie”. Lo illustriamo dapprima per le equazioni scalari

$$\dot{x} = a(t)x + b(t), \quad x \in \mathbf{R}. \quad (5.6)$$

Cerchiamo una soluzione particolare di (5.6) nella forma

$$x_p(t) = c(t)e^{\int_0^t a(s) ds}.$$

Ricordiamo che $e^{\int_0^t a(s) ds}$ è una soluzione fondamentale della omogenea associata $\dot{x} = a(t)x$. Abbiamo che

$$\dot{x}_p(t) = \dot{c}(t)e^{\int_0^t a(s) ds} + c(t)e^{\int_0^t a(s) ds}a(t) = \dot{c}(t)e^{\int_0^t a(s) ds} + a(t)x_p(t)$$

e pertanto x_p è una soluzione di (5.6) se

$$\dot{c}(t)e^{\int_0^t a(s) ds} = b(t)$$

ossia

$$\dot{c}(t) = b(t)e^{-\int_0^t a(s) ds}.$$

Integrando troviamo

$$c(t) = \int_0^t b(\tau)e^{-\int_0^\tau a(s) ds} d\tau$$

e, pertanto, una soluzione particolare è data da

$$x_p(t) = e^{\int_0^t a(s) ds} \int_0^t b(\tau)e^{-\int_0^\tau a(s) ds} d\tau.$$

La soluzione generale di (5.6) è data da

$$x(t) = e^{\int_0^t a(s) ds} \left(\lambda + \int_0^t b(\tau)e^{-\int_0^\tau a(s) ds} d\tau \right), \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

ESERCIZIO Si provi che qualunque soluzione di

$$\dot{x} + ax = f(t), \quad a > 0 \quad (5.7)$$

dove $f \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ soddisfa

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = L$$

soddisfa

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \frac{L}{a}.$$

Soluzione. Scrivendo ogni soluzione di (5.7) mediante il metodo di “variazione delle costanti arbitrarie” si trova

$$x(t) = \left(x_0 + \int_0^t f(s)e^{as} ds \right) e^{-at}$$

Dal teorema dell'Hopital

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x_0 + \int_0^t f(s)e^{as}}{e^{at}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)e^{at}}{ae^{at}} = \frac{L}{a}.$$

ESERCIZIO Disegnare la soluzione di

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{t} - x \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Si provi in particolare che è definita in $(0, +\infty)$ e si calcolino $\lim_{t \rightarrow 0} x(t)$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$. Si scriva la soluzione analitica.

METODO DI “VARIAZIONE DELLE COSTANTI ARBITRARIE” IN \mathbf{R}^n . Cerchiamo una soluzione di (5.4) della forma

$$x_p(t) = M(t)c(t)$$

dove $M(t)$ è una matrice fondamentale per l'equazione omogenea associata.

Abbiamo che

$$\begin{aligned} \dot{x}_p(t) &= \dot{M}(t)c(t) + M(t)\dot{c}(t) = A(t)M(t)c(t) + M(t)\dot{c}(t) \\ &= A(t)x_p(t) + M(t)\dot{c}(t) \end{aligned}$$

e pertanto x_p è una soluzione di (5.4) se

$$M(t)\dot{c}(t) = b(t) \quad (5.8)$$

ossia, ricordando che $M(t)$ è invertibile per tutti i t ,

$$\dot{c}(t) = M^{-1}(t)b(t).$$

Integrando troviamo

$$c(t) = \int_0^t M^{-1}(\tau)b(\tau) d\tau$$

e, pertanto, una soluzione particolare è data da

$$x_p(t) = M(t) \int_0^t M^{-1}(\tau)b(\tau) d\tau.$$

La soluzione generale di (5.6) è data da

$$x(t) = M(t) \left(x_0 + \int_0^t M^{-1}(\tau)b(\tau) d\tau \right), \quad x_0 \in \mathbf{R}^n.$$

ESERCIZIO Si consideri il problema

$$\begin{cases} \dot{x} = |x - t| \\ x(0) = a. \end{cases}$$

Discutere al variare di a , esistenza ed unicità locale e globale della soluzione. Scrivere esplicitamente la soluzione. Dire per quali valori di a si ha che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x(t)}{t} = 1.$$

ESERCIZIO Risolvere il problema

$$\begin{cases} \dot{x} = \max\{t, x\} \\ x(0) = x_0 < 0 \end{cases}$$

SUGGERIMENTO Il campo vettoriale $\max\{t, x\} = t$ se $t \geq x$ ed $\max\{t, x\} = x$ se $x \geq t$. Essendo $x_0 < 0$ la soluzione è descritta da $\dot{x} = t$, ossia $x(t) = x_0 + t^2/2$, fino a che $x(t) \leq t$. Poi sarà descritta da $\dot{x} = x$.

ESERCIZIO Sia $g \in C^1(\mathbf{R})$ una funzione tale che $g(t) > e^t, \forall t > 0$. Provare che la soluzione $x(t)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} + g(t)x = e^t \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

soddisfa $x(t) < 1$ per ogni $t > 0$.

5.3 Equazioni lineari di ordine n

Ad una equazione differenziale lineare omogenea di ordine n della forma

$$D^n x + a_1(t)D^{n-1}x + \dots + a_{n-1}(t)Dx + a_n(t)x = 0 \quad (5.9)$$

dove l'operatore di derivazione è indicato con

$$D := \frac{d}{dt}$$

si applicano tutti i risultati della sezione precedente, una volta scritta la (5.9) in forma di sistema: ponendo

$$(y_1, y_2, \dots, y_n) := (x, Dx, \dots, D^{n-1}x)$$

si ottiene il sistema del primo ordine

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dots \\ \dot{y}_n = -a_1(t)y_n - \dots - a_n(t)y_1 \end{cases}$$

con una matrice A associata.

In particolare l'insieme delle soluzioni di (5.9) è uno spazio vettoriale di dimensione n e, per trovare la soluzione generale di (5.9) basta trovarne n soluzioni linearmente indipendenti.

Una classe di equazioni in cui è possibile trovare esplicitamente le soluzioni è quando i coefficienti sono costanti.

5.4 Equazioni a coefficienti costanti

Iniziamo dalle equazioni di ordine n a coefficienti costanti.

$$D^n x + a_1 D^{n-1}x + \dots + a_{n-1}Dx + a_n x = 0 \quad (5.10)$$

che scriviamo come

$$P(D)x = 0$$

definendo l'operatore differenziale

$$P(D) := D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1}D + a_n I.$$

Cerchiamo soluzioni di (5.10) della forma particolare

$$x(t) = e^{\lambda t}.$$

La funzione $e^{\lambda t}$ è soluzione di (5.10) se e solo se

$$P(D)e^{\lambda t} = (\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n)e^{\lambda t} = 0$$

cioè se λ è la radice del polinomio caratteristico associato

$$P(\lambda) := \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n.$$

Siano

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{C}$$

le n radici complesse del polinomio caratteristico $p(\lambda)$.

CASO 1: LE RADICI λ_i SONO REALI E DISTINTE In questo caso abbiamo n soluzioni reali linearmente indipendenti di (5.10)

$$e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$$

e, quindi, la soluzione generale di (5.10) è data da

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t}, \quad c_i \in \mathbf{R}.$$

ESEMPIO Trovare la soluzione di

$$\begin{cases} \ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 0 \\ x(0) = 0, \dot{x}(0) = 1. \end{cases} \quad (5.11)$$

Il polinomio caratteristico $p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$ ha le radici reali $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, quindi la soluzione generale è

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}, \quad c_i \in \mathbf{R}.$$

Imponendo le condizioni iniziali

$$0 = x(0) = c_1 + c_2$$

ed $\dot{x}(t) = c_1 e^t + c_2 2e^{2t}$ da cui

$$1 = \dot{x}(0) = c_1 + c_2 2$$

si trova $c_1 = -1$ e $c_2 = 1$. In conclusione la soluzione di (5.11) è

$$x(t) = -e^t + e^{2t}.$$

CASO 2: UNA RADICE $\lambda = \alpha + i\beta$ È COMPLESSA In questo caso, essendo il polinomio caratteristico reale ($a_i \in \mathbf{R}$, $\forall i = 1, \dots, n$) pure la complessa

coniugata $\lambda^* = \alpha - i\beta$ è radice del polinomio caratteristico. Abbiamo così 2 soluzioni di (5.10) (complesse) indipendenti date da

$$e^{\lambda t} = e^{\alpha t} e^{i\beta t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t), \quad e^{\lambda^* t} = e^{\alpha t} e^{-i\beta t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t - i \sin \beta t).$$

Sommandole e sottraendole troviamo 2 soluzioni reali indipendenti

$$\frac{e^{\lambda t} + e^{\lambda^* t}}{2} = e^{\alpha t} \cos \beta t, \quad \frac{e^{\lambda t} - e^{\lambda^* t}}{2i} = e^{\alpha t} \sin \beta t.$$

ESEMPIO 1: L'OSCILLATORE ARMONICO Trovare le soluzioni di

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \omega \in \mathbf{R}. \quad (5.12)$$

Il polinomio caratteristico $p(\lambda) = \lambda^2 + \omega^2$ ha le radici complesse $\pm i\omega$, e, quindi, ha le soluzioni indipendenti $\cos \omega t$, $\sin \omega t$. La soluzione generale di (5.12) è

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t, \quad c_i \in \mathbf{R}.$$

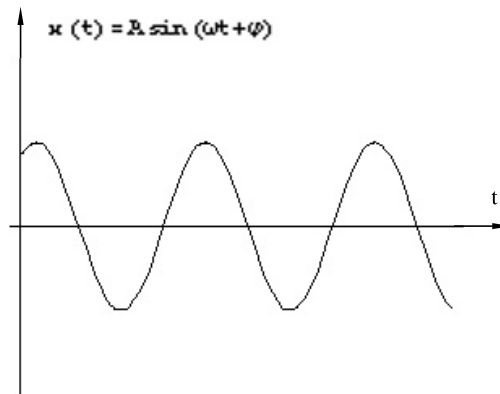


Figure 5.1: L'oscillatore armonico

ESEMPIO 2: L'OSCILLATORE ARMONICO CON ATTRITO Trovare le soluzioni di

$$\ddot{x} + \mu \dot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \mu > 0, \omega \in \mathbf{R}. \quad (5.13)$$

Il polinomio caratteristico $p(\lambda) = \lambda^2 + \mu\lambda + \omega^2$ ha le radici

$$\lambda_{1,2} := \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4\omega^2}}{2}.$$

Bisogna distinguere casi diversi.

Caso (i): $0 < \mu < 2\omega$ (debole attrito).

Si hanno 2 soluzioni complesse

$$\lambda_{1,2} := \frac{-\mu \pm i\sqrt{4\omega^2 - \mu^2}}{2}$$

e quindi tutte le soluzioni di (5.13) sono

$$x(t) = c_1 e^{-\mu t/2} \cos\left(\frac{t}{2}\sqrt{4\omega^2 - \mu^2}\right) + c_2 e^{-\mu t/2} \sin\left(\frac{t}{2}\sqrt{4\omega^2 - \mu^2}\right)$$

con $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$. Tutte le soluzioni $x(t)$ tendono a zero in modo esponenzialmente veloce, oscillando (oscillazioni smorzate).

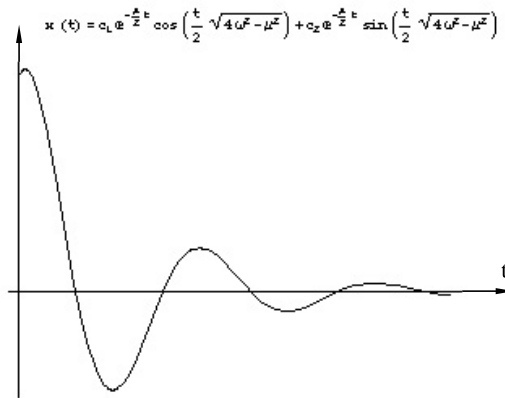


Figure 5.2: L'oscillatore armonico con debole attrito

Caso (ii): $\mu > 2\omega$ (forte attrito).

Si hanno 2 soluzioni reali distinte

$$\lambda_{1,2} := \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4\omega^2}}{2}$$

e, quindi, tutte le soluzioni di (5.13) sono

$$x(t) = c_1 e^{-(\mu + \sqrt{\mu^2 - 4\omega^2})t/2} + c_2 e^{-(\mu - \sqrt{\mu^2 - 4\omega^2})t/2}$$

con $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$. Tutte le soluzioni $x(t)$ tendono a zero in modo esponenzialmente veloce, senza oscillazioni.

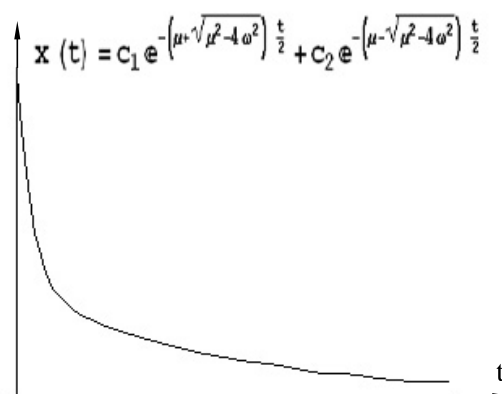


Figure 5.3: L'oscillatore armonico con forte attrito

Caso (iii): rimane il caso

$$\mu = 2\omega$$

in cui le 2 soluzioni $\lambda_1 = \lambda_2 = -\mu/2 = -\omega$ coincidono. In questo caso troviamo solo la soluzione reale

$$e^{-\omega t}.$$

Come trovare un'altra soluzione di (5.13) linearmente indipendente? Verifichiamo che

$$x(t) = te^{-\omega t}$$

è un'altra soluzione di $(D^2 + 2\omega D + \omega^2)x = 0$ che possiamo scrivere come

$$(D + \omega)^2 x := (D + \omega) \circ (D + \omega) x = 0.$$

Si ha

$$\begin{aligned} (D + \omega)^2 (te^{-\omega t}) &= (D + \omega)(e^{-\omega t} - t\omega e^{-\omega t} + \omega t e^{-\omega t}) \\ &= (D + \omega)(e^{-\omega t}) = -\omega e^{-\omega t} + \omega e^{-\omega t} = 0. \end{aligned}$$

Osservazione 5.4.1 *Lagrange ed Eulero per trovare quest'altra soluzione ragionavano così: se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ lo spazio delle soluzioni è lo spazio vettoriale bidimensionale $X := \langle e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t} \rangle$. Un'altra base di X è data da $e^{\lambda_1 t}$, $e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}$. Quando $\lambda_2 \rightarrow \lambda_1$ questo secondo elemento della base tende a $e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t} \approx (\lambda_2 - \lambda_1)te^{\lambda_1 t}$. Questo suggerisce che, per $\lambda_1 = \lambda_2$, due soluzioni indipendenti siano $e^{\lambda_1 t}$, $te^{\lambda_1 t}$.*

Dimostriamo in generale che

Teorema 5.4.1 *Siano $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m$ radici coincidenti del polinomio caratteristico $p(\lambda)$ associato alla equazione differenziale lineare (5.10). Allora*

$$e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \dots, t^{m-1}e^{\lambda_1 t}$$

sono m soluzioni linearmente indipendenti di (5.10).

DIMOSTRAZIONE. Il polinomio caratteristico si scompone come

$$p(\lambda) = q(\lambda)(\lambda - \lambda_1)^m$$

dove $q(\lambda)$ è un polinomio di grado $n - m$. Scriviamo la equazione $P(D)x = 0$ come

$$q(D) \circ (D - \lambda_1 I)^m x = 0.$$

Basta provare che

$$(D - \lambda_1 I)^m [t^k e^{\lambda_1 t}] = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m - 1.$$

Si ha

$$\begin{aligned} (D - \lambda_1 I)^m [t^k e^{\lambda_1 t}] &= (D - \lambda_1 I)^{m-1} [(D - \lambda_1 I)t^k e^{\lambda_1 t}] \\ &= (D - \lambda_1 I)^{m-1} [kt^{k-1} e^{\lambda_1 t} + t^k \lambda_1 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 t^k e^{\lambda_1 t}] \\ &= k(D - \lambda_1 I)^{m-1} (t^{k-1} e^{\lambda_1 t}) \end{aligned}$$

e, quindi, per ricorrenza

$$(D - \lambda_1 I)^m [t^k e^{\lambda_1 t}] = k(k-1)\dots(k-m+1)t^{k-m}e^{\lambda_1 t}.$$

Per $k = 1, \dots, m - 1$ il fattore $k(k-1)\dots(k-m+1) = 0$ e, quindi, ciascuna $t^k e^{\lambda_1 t}$, $k = 1, \dots, m - 1$, è soluzione di (5.10). ■

Riassumendo, siano

$$\lambda_1, \dots, \lambda_p$$

le soluzioni del polinomio caratteristico $p(\lambda)$ associato alla (5.10), di molteplicità algebrica rispettivamente

$$m_1, \dots, m_p$$

(si ha $m_1 + \dots + m_p = n$). Allora si hanno le n soluzioni (possibilmente complesse) indipendenti

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \dots, t^{m_1-1}e^{\lambda_1 t} \\ \dots \\ e^{\lambda_p t}, te^{\lambda_p t}, \dots, t^{m_p-1}e^{\lambda_p t}. \end{cases}$$

della equazione (5.10)¹. Se un $\lambda_i = \alpha + i\beta$ (di molteplicità m_i) anche λ_i^* sarà autovalore (di molteplicità m_i) e si possono ottenere $2m_i$ soluzioni indipendenti reali della forma

$$t^k e^{\alpha t} \cos(\beta t), t^k e^{\alpha t} \sin(\beta t), \quad k = 0, 1, \dots, m_i - 1.$$

ESEMPIO Trovare la soluzione generale di

$$D^4 x - 2D^3 x + 2D^2 x - 2Dx + x = 0.$$

Il polinomio associato è $p(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda + 1$ ha le radici 1 (doppia) e $\pm i$. Quindi 4 soluzioni linearmente indipendenti sono

$$\cos t, \sin t, e^t, te^t$$

e la soluzione generale è

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + e^t(c_3 + c_4 t), c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbf{R}.$$

ESEMPIO Trovare la soluzione generale di

$$D^4 x + 2D^2 x + x = 0.$$

Il polinomio associato $p(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1$ ha le radici $\pm i$ doppie. Quindi 4 soluzioni linearmente indipendenti sono

$$\cos t, \sin t, t \cos t, t \sin t$$

e la soluzione generale è

$$x(t) = (c_1 + c_2 t) \cos t + (c_3 + c_4 t) \sin t, c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbf{R}.$$

ESERCIZIO Dato $b > 0$ trovare la costante $a \in \mathbf{R}$ tale che la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0 \\ x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

tenda a zero il più rapidamente possibile per $t \rightarrow +\infty$.

LE OSCILLAZIONI FORZATE: IL FENOMENO DELLE RISONANZE Trovare la soluzione generale di

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \cos(\nu t) \tag{5.14}$$

¹Che si scrive $P(D)x = (D - \lambda_1)^{m_1} \dots (D - \lambda_p)^{m_p} x = 0$.

(oscillatore armonico con una forzante periodica di frequenza ν).

Le soluzioni della equazione omogenea associata $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ (oscillatore libero) sono

$$x(t) = \alpha \cos(\omega t + \theta), \quad \alpha \in \mathbf{R}, \theta \in \mathbf{R}.$$

Cerco una soluzione particolare di (5.14) del tipo

$$x(t) = A \cos(\nu t).$$

Sostituendo trovo che $x(t)$ è soluzione se $A = 1/(\omega^2 - \nu^2)$. In conclusione la soluzione generale di (5.14) è, se $\nu \neq \omega$,

$$x(t) = \frac{1}{\omega^2 - \nu^2} \cos(\nu t) + \alpha \cos(\omega t + \theta), \quad \alpha \in \mathbf{R}, \theta \in \mathbf{R}$$

(oscillazione forzata + oscillazione libera). Vedo che l'ampiezza della oscillazione forzata cresce se $\nu \rightarrow \omega$, cioè se la frequenza forzante si avvicina alla frequenza propria dell'oscillatore armonico.

Se $\nu = \omega$ la forzante è in "risonanza" con l'oscillatore armonico. Cerchiamo una soluzione particolare come

$$x(t) = At \sin(\omega t).$$

Sostituendo trovo che $x(t)$ è soluzione se $A = 1/2\omega$. In conclusione la soluzione generale di (5.14) è, se $\nu = \omega$,

$$x(t) = \frac{t}{2\omega} \sin(\omega t) + \alpha \cos(\omega t + \theta), \quad \alpha \in \mathbf{R}, \theta \in \mathbf{R}.$$

Vedo che la ampiezza della oscillazione forzata aumenta indefinitamente.

ESERCIZIO (oscillazioni forzate con attrito) Trovare la soluzione generale di

$$\ddot{x} + k\dot{x} + \omega^2 x = \cos(\nu t). \quad (5.15)$$

Si veda che l'attrito impedisce che l'ampiezza della oscillazione forzata aumenti indefinitamente anche per $\nu = \omega$. Da un punto di vista "fisico": all'aumentare dell'ampiezza dell'oscillazione, aumenta anche la dissipazione di energia dovuta all'attrito, fino a raggiungere un bilanciamento tra l'energia fornita dalla forzante e l'energia dissipata.

Specifichiamo il metodo di variazione delle costanti arbitrarie per equazioni del secondo ordine

$$\ddot{x} + a_1(t)\dot{x} + a_2(t)x = f(t) \quad (5.16)$$

Siano $x_1(t)$, $x_2(t)$ due soluzioni linearmente indipendenti della equazione omogenea associata

$$\ddot{x} + a_1(t)\dot{x} + a_2(t)x = 0.$$

Cerchiamo una soluzione di (5.16) della forma

$$x(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t). \quad (5.17)$$

Derivando, si ha

$$\dot{x}(t) = c_1(t)\dot{x}_1(t) + c_2(t)\dot{x}_2(t) + \dot{c}_1(t)x_1 + \dot{c}_2(t)x_2(t).$$

Imponendo

$$\dot{c}_1(t)x_1(t) + \dot{c}_2(t)x_2(t) = 0 \quad (5.18)$$

si deduce

$$\dot{x}(t) = c_1(t)\dot{x}_1(t) + c_2(t)\dot{x}_2(t) \quad (5.19)$$

e, quindi, derivando ulteriormente,

$$\ddot{x}(t) = \dot{c}_1(t)\dot{x}_1(t) + \dot{c}_2(t)\dot{x}_2(t) + c_1(t)\ddot{x}_1(t) + c_2(t)\ddot{x}_2(t). \quad (5.20)$$

Usando (5.17), (5.19), (5.20) e il fatto che x_1 , x_2 risolvono la equazione omogenea associata, si ha che, $x(t)$ data in (5.17) risolve l'equazione (5.16) se e solo se

$$\dot{c}_1(t)\dot{x}_1(t) + \dot{c}_2(t)\dot{x}_2(t) = f(t).$$

Ricordando anche (5.18) i coefficienti c_1 , c_2 devono soddisfare

$$\begin{cases} \dot{c}_1(t)x_1(t) + \dot{c}_2(t)x_2(t) = 0 \\ \dot{c}_1(t)\dot{x}_1(t) + \dot{c}_2(t)\dot{x}_2(t) = f(t). \end{cases}$$

ossia, in forma matriciale,

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

(si noti che è il sistema (5.8)). Si ricavano quindi \dot{c}_1 , \dot{c}_2 , e, poi, c_1 , c_2 .

ESERCIZIO Si provi che la soluzione di

$$\begin{cases} \ddot{x} + x = a(t)x \\ x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \quad (5.21)$$

dove $a(\cdot) \in C([0, +\infty), \mathbf{R})$ soddisfa

$$\int_0^{+\infty} |a(t)| dt < +\infty, \quad (5.22)$$

é limitata in $[0, +\infty)$.

Suggerimento: ponendo $f(t) = a(t)x(t)$ si usi la formula di variazioni delle costanti arbitrarie per scrivere la soluzione di

$$\begin{cases} \ddot{x} + x = f(t) \\ x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 0. \end{cases}$$

Si ottiene per la soluzione $x(t)$ di (5.21) una equazione integrale da cui si riesce ad ottenere, usando (5.21), una maggiorazione per $|x(t)|$.

ESERCIZIO Sia $f \in C(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ tale che $|f(t, x)| < 1$ per ogni $(t, x) \in \mathbf{R}^2$. Si provi che la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = f(t, x) \\ x(0) = \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

soddisfa $|x(t)| < 1, \forall t > 0$.

Suggerimento: si usi anche qui la formula di variazioni delle costanti arbitrarie come sopra.

5.5 I sistemi a coefficienti costanti

Consideriamo adesso il caso generale dei sistemi

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbf{R}^n \tag{5.23}$$

dove $A \in \text{Mat}(n \times n)$ è una matrice con coefficienti indipendenti dal tempo.

Cerchiamo una soluzione particolare di (5.23) della forma

$$x(t) = e^{\lambda t}v, \quad v \in \mathbf{R}^n.$$

Inserendo nella equazione troviamo che $e^{\lambda t}v$ è soluzione di (5.23) se e solo se

$$\dot{x}(t) = \lambda e^{\lambda t}v = Ax(t) = e^{\lambda t}Av,$$

cioè se e solo se

$$Av = \lambda v$$

ossia $v \in \mathbf{R}^n$ è autovettore di A di autovalore λ .

5.5.1 Caso 1: le radici λ_i sono reali e distinte

In questo caso abbiamo n soluzioni reali linearmente indipendenti di (5.23)

$$e^{\lambda_1 t} v_1, \dots, e^{\lambda_n t} v_n$$

(essendo indipendenti gli autovettori v_i corrispondenti ad autovalori distinti λ_i). Quindi, la soluzione generale di (5.23) è data da

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} v_n, \quad c_i \in \mathbf{R}.$$

ESEMPIO 1: LA “SELLA”. Il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases} \quad (5.24)$$

che, in forma matriciale si scrive,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (5.25)$$

è disaccoppiato. Tutte le soluzioni sono

$$x_1(t) = x_1(0)e^t, \quad x_2(t) = x_2(0)e^{-t} \quad (5.26)$$

ossia

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} (t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Possiamo ricavare dalla rappresentazione parametrica delle orbite in (5.26) la equazione delle traiettorie

$$x_1 x_2 = \text{const} = x_1(0)x_2(0).$$

Le traiettorie del sistema formano dei rami di iperbole equilatera, vedi figura 5.4. Per questo il ritratto in fase di (5.24) si chiama “sella”.

ESEMPIO 2 (repulsore armonico) Il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases} \quad (5.27)$$

si scrive, in forma matriciale,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (5.28)$$

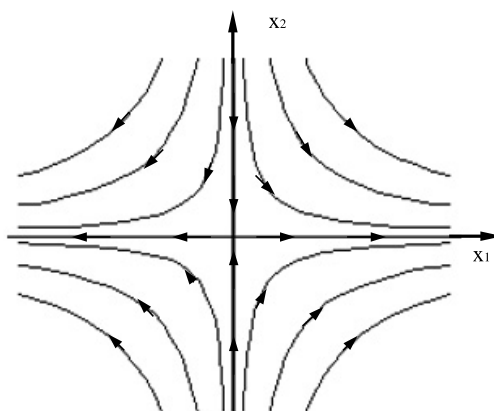


Figure 5.4: La sella

Gli autovalori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sono ± 1 con autovettori rispettivamente

$$v_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_- = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La soluzione generale di (5.27) è data da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} (t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tutte le traiettorie con dato iniziale sullo spazio lineare $\langle v_- \rangle$ rimangono in $\langle v_- \rangle$ per tutti i tempi e convergono a zero con velocità esponenziale per tempi positivi. Analogamente lo spazio lineare $\langle v_+ \rangle$ è invariante per tutti i tempi e le soluzioni convergono a zero con velocità esponenziale per tempi negativi.

Si noti che (5.28) corrisponde all'equazione del secondo ordine $\ddot{x} = x$ detta “repulsore armonico”.

Problema: provare che (5.28) possiede quale integrale primo la funzione

$$G(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2.$$

Dunque le traiettorie di (5.28) descrivono rami di iperbole $x_1^2 - x_2^2 = \text{cost.}$

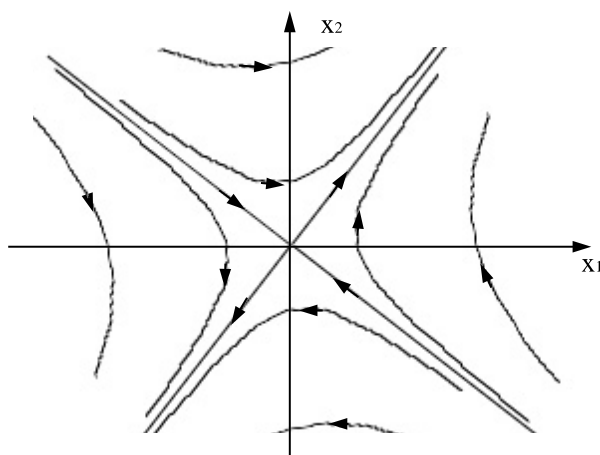


Figure 5.5: Il repulsore armonico

DOMANDA: nelle coordinate

$$y_1 = x_1 + x_2, \quad y_2 = x_1 - x_2$$

come si trasforma il sistema (5.28)?

Risposta: nel sistema (5.25). Infatti nella base degli autovettori il sistema diventa disaccoppiato.

Quest'ultima osservazione è un fatto generale. Se A è diagonalizzabile, il sistema

$$\dot{x} = Ax$$

si trasforma, nella base dei suoi autovettori v_1, \dots, v_n , nel sistema disaccoppiato

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda_1 y_1 \\ \dots \\ \dot{y}_n = \lambda_n y_n \end{cases}$$

ossia

$$\dot{y} = \Delta y$$

con matrice diagonale

$$\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Infatti, col cambio di coordinate

$$x = Vy$$

dove $V = (v_1, \dots, v_n)$ è la matrice degli autovettori di A (ossia $x = y_1v_1 + \dots + y_nv_n$), si ha

$$\dot{y} = V^{-1}\dot{x} = V^{-1}Ax = V^{-1}AVy = \Delta y.$$

ESERCIZIO Disegnare le traiettorie del sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = x_2 \end{cases} \quad (5.29)$$

nello spazio delle fasi, mostrando che sono semirette di centro l'origine.

Provare che il sistema (5.29) non possiede nessun integrale primo diverso da una costante.

Soluzione: un integrale primo è una funzione costante lungo ogni semiretta di centro l'origine. Per continuità deve essere costante in tutto il piano.

ESEMPIO 1 Disegnare le traiettorie di

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = 2x_2 \end{cases} \quad (5.30)$$

e provare che formano rami di parabole, vedi figura 5.6.

SUGGERIMENTO Le soluzioni sono

$$\begin{cases} x_1(t) = x_1(0)e^t \\ x_2(t) = x_2(0)e^{2t} \end{cases}$$

da cui, eliminando il tempo, $x_2/x_1^2 = \text{cost}, \forall t$.

Domanda: Il sistema (5.30) possiede qualche integrale primo non costante?

Risposta: no. Perché?

5.5.2 Caso 2: una radice $\lambda = \alpha + i\beta$ è complessa

La soluzione di (5.23) si scrive sempre in forma complessa

$$x(t) = ce^{\alpha t}e^{i\beta t}v, \quad c \in \mathbf{C}. \quad (5.31)$$

ESEMPIO Si scriva in forma complessa la soluzione di

$$\begin{cases} \dot{z} = \lambda z \\ z(0) = \rho e^{i\gamma} \in \mathbf{C}, \end{cases}$$

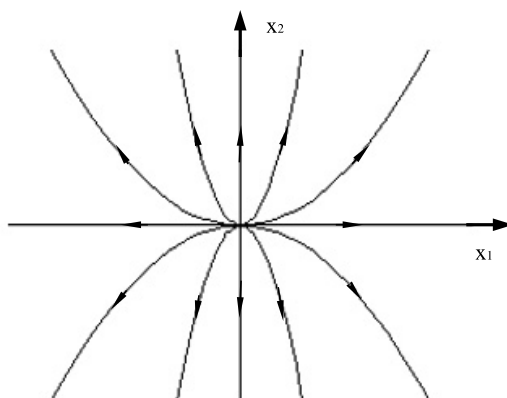


Figure 5.6: Le traiettorie dell'Esempio 1 formano rami di parabola.

$z = x + iy \in \mathbf{C}$. La soluzione è

$$z(t) = z(0)e^{\lambda t} = \rho e^{\alpha t} e^{i(\beta t + \gamma)},$$

Il modulo di $z(t)$ è $|z(t)| = \rho e^{\alpha t}$ e la sua fase è $\beta t + \gamma$. Questo esempio mette in luce la semplicità della notazione complessa.

La funzione $Re(x(t))$ è soluzione in forma reale di $\dot{x} = Ax$ (essendo la matrice A reale).

Per scrivere la soluzione solo con vettori e numeri reali, si consideri l'autovettore complesso $v = \xi + i\eta$, $\xi \in \mathbf{R}^n$, $\eta \in \mathbf{R}^n$, associato all'autovalore complesso $\lambda = \alpha + i\beta$,

$$Av = \lambda v.$$

Scrivendo $c = \rho e^{i\gamma}$, $\rho, \gamma \in \mathbf{R}$, si ha

$$x(t) = \rho e^{\alpha t} e^{i(\beta t + \gamma)}(\xi + i\eta) = \rho e^{\alpha t} (\cos(\beta t + \gamma) + i \sin(\beta t + \gamma))(\xi + i\eta),$$

e, pertanto, la soluzione generale è

$$Re(x(t)) = \rho e^{\alpha t} \cos(\beta t + \gamma)\xi - \rho e^{\alpha t} \sin(\beta t + \gamma)\eta$$

al variare di $\rho, \gamma \in \mathbf{R}$. Si vede che questa la soluzione vive nel piano bidimensionale reale

$$E := \langle \xi, \eta \rangle.$$

Il piano $E = \langle \xi, \eta \rangle$ è invariante per la equazione differenziale, ossia partendo con un dato iniziale in E la soluzione rimane in E per tutti i tempi.

Geometricamente, si vede che il piano bidimensionale reale

$$E := \langle \xi, \eta \rangle$$

è invariante per A , ossia $A(E) \subset E$. Infatti, si ha

$$A\xi + iA\eta = A(\xi + i\eta) = (\alpha + i\beta)(\xi + i\eta) = (\alpha\xi - \beta\eta) + i(\beta\xi + \alpha\eta)$$

e, pertanto,

$$A\xi = \alpha\xi - \beta\eta, \quad A\eta = \beta\xi + \alpha\eta.$$

DOMANDA: Qual'è la matrice che rappresenta $A|_E$ nella base ξ, η ?

Risposta:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Per capire, quindi, il caso generale in cui c'è un autovalore complesso basta studiare il sistema in “forma normale”:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

L'andamento qualitativo delle soluzioni è il seguente: se $\alpha < 0$ le soluzioni tendono a zero per tempi positivi spiraleggiando (“FUOCO STABILE”), vedi figura 5.7; se $\alpha > 0$ le soluzioni tendono a zero spiraleggiando per tempi negativi (“FUOCO INSTABILE”) vedi figura 5.8; se $\alpha = 0$ oscillano attorno a zero (“CENTRO”).

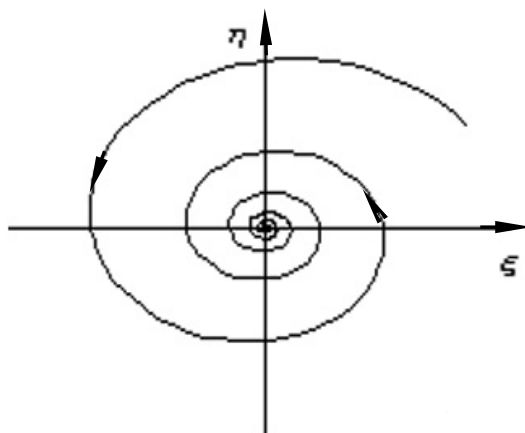


Figure 5.7: Il fuoco stabile.

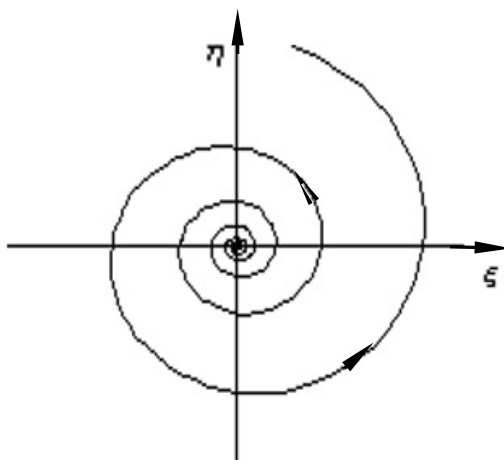


Figure 5.8: Il fuoco instabile.

Questa è la situazione che abbiamo già incontrato con l'oscillatore armonico con debole attrito

$$\ddot{x} + k\dot{x} + x = 0, \quad 0 < k < 2,$$

che, scritto come sistema, è dato da

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - ky. \end{cases} \quad (5.32)$$

Per esercizio si trovino gli autovalori e della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -k \end{pmatrix}$$

e si disegnino le orbite di (5.32). Per $k = 0$ si trova l'oscillatore armonico

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$$

PROBLEMA Provare che (5.32) non possiede integrali primi non costanti se $k \neq 0$. Per $k = 0$ c'è l'integrale primo

$$G(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

le cui curve di livello sono circonferenze (per cui il ritratto in fase delle soluzioni si chiama CENTRO).

DOMANDA: Qual'è il legame tra G e l'integrale primo dell'energia definito in (3.13)?

In conclusione, nel caso gli autovalori di A (reali o complessi) siano tutti distinti la equazione $\dot{x} = Ax$ si decompone in equazioni disaccoppiate con spazio delle fasi o 1 o 2 dimensionale. Su questi sottospazi invarianti il sistema si può comportare come abbiamo visto negli esempi precedenti.

Il seguente esempio è di fondamentale importanza nelle applicazioni.

PICCOLE OSCILLAZIONI DI UN SISTEMA MECCANICO CONSERVATIVO Consideriamo un sistema lineare del secondo ordine

$$\ddot{x} = -Ax, \quad x \in \mathbf{R}^n \quad (5.33)$$

dove A è una matrice simmetrica reale (queste equazioni si ottengono linearizzando attorno ad un equilibrio l'equazione di Newton $\ddot{x} = -\nabla V(x)$).

La matrice simmetrica reale A ha una base di autovettori (ortonormali) $v_1, \dots, v_n \in \mathbf{R}^n$ con corrispondenti autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ reali (anche multipli).

Col cambio di coordinate (unitario)

$$x = Uy$$

dove $U = (v_1, \dots, v_n)$ è la matrice degli autovettori di A (ossia $x = y_1v_1 + \dots + y_nv_n$), l'equazione (5.33) diventa

$$\ddot{y} = U^{-1}\ddot{x} = -U^{-1}Ax = -U^{-1}AUy = -Dy$$

con matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

In altre parole il sistema (5.33) si è disaccoppiato in n equazioni scalari del secondo ordine

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 + \lambda_1 y_1 = 0 \\ \dots \\ \ddot{y}_n + \lambda_n y_n = 0 \end{cases}$$

dove, per $\lambda_k > 0$, si ha l'equazione dell'oscillatore armonico, mentre, per $\lambda_k < 0$, si ha l'equazione del repulsore armonico, che abbiamo già studiato.

Gli autovalori λ_k sono detti “frequenze caratteristiche” di oscillazione e gli autovettori v_k sono detti “modi di vibrazione normali”.

ESERCIZIO Trovare tutti i numeri reali $a \in \mathbf{R}$ tali che tutte le soluzioni del sistema

$$\ddot{x} = -\nabla V(x), \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$$

siano periodiche nei due seguenti casi

$$V(x) = x_1^2 + ax_2^2, \quad V(x) = x_1^2 + x_2^2 + ax_1x_2.$$

Prima di discutere il caso di radici multiple trattiamo la soluzione generale delle soluzioni.

5.6 Esponenziale di una matrice

Nello spazio vettoriale delle matrici quadrate $A \in \text{Mat}(n \times n)$ (linearmente isomorfo ad \mathbf{R}^{n^2}) considero la norma matriciale

$$\|A\| := \sup_{|x|=1} |Ax|$$

dove $|\cdot|$ denota la norma di \mathbf{R}^n .

ESERCIZIO Verificare che $\|\cdot\|$ è una norma.

ESERCIZIO Provare che

$$\|A\| := \sup_{x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|}.$$

Lo spazio delle matrici è anche un'algebra rispetto al prodotto di composizione, ossia $\forall A, B \in \text{Mat}(n \times n)$ si ha

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|. \quad (5.34)$$

ESERCIZIO Dimostrare (5.34).

SOLUZIONE Per ogni $x \in \mathbf{R}^n$ si ha $\|ABx\| \leq \|A\| \|Bx\| \leq \|A\| \|B\| |x|$.

Data una matrice $A \in \text{Mat}(n \times n)$ definisco

$$e^A := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}. \quad (5.35)$$

La serie in (5.35) converge totalmente, e, quindi, uniformemente, su ogni insieme $\{\|A\| \leq a\}$, $\forall a > 0$. Infatti, usando (5.34), si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\|A^n\|}{n!} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\|A\|^n}{n!} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} = e^a < +\infty.$$

Consideriamo la famiglia di matrici

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \frac{A^n}{n!}.$$

Si ha $e^0 = I$.

Teorema 5.6.1 *Si ha*

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At} \quad (5.36)$$

DIMOSTRAZIONE. La serie delle derivate di e^{At} ,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n t^{n-1} \frac{A^n}{n!} = A \sum_{n=1}^{+\infty} t^{n-1} \frac{A^{n-1}}{(n-1)!} = A e^{At},$$

converge totalmente. Per il criterio della derivazione per serie ne segue che e^{At} è derivabile e vale (5.36). ■

ESERCIZIO Si considerino le successioni di funzioni $f_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definite da

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}, \quad f_n(x) = \frac{x}{1 + nx^2}.$$

Si dica se f_n converge uniformemente, se la successione delle derivate Df_n converge uniformemente, e se vale

$$D \lim_n f_n = \lim_n Df_n.$$

Il teorema fondamentale delle equazioni lineari a coefficienti costanti è

Teorema 5.6.2 *La soluzione del problema di cauchy*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (5.37)$$

risulta

$$x(t) = e^{At} x_0. \quad (5.38)$$

Notiamo che, formalmente, (5.38) è la stessa formula che si ha per le equazioni scalari.

DIMOSTRAZIONE. Dal teorema precedente

$$\frac{d}{dt}e^{At}x_0 = A(e^{At}x_0)$$

ed $e^0 = I$. ■

La matrice e^{At} è, nel caso di sistemi a coefficienti costanti, la matrice risolvente definita in (5.3).

Teorema 5.6.3 *La famiglia a 1-parametro di trasformazioni*

$$e^{At}, \quad t \in \mathbf{R}$$

forma un gruppo di isomorfismi di \mathbf{R}^n , ossia

$$e^{A(t+s)} = e^{At}e^{As}. \quad (5.39)$$

L'inversa di ciascun e^{tA} è (ponendo $s = -t$)

$$(e^{tA})^{-1} = e^{-At}.$$

DIMOSTRAZIONE. Una dimostrazione può essere fatta moltiplicando secondo Cauchy le serie totalmente convergenti

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \frac{A^n}{n!}, \quad e^{As} = \sum_{n=0}^{+\infty} s^n \frac{A^n}{n!}.$$

Diamo qui, invece, la seguente dimostrazione rapidissima. Per ogni $s \in \mathbf{R}$ la funzione matriciale

$$t \rightarrow M(t) := e^{At}e^{As}$$

risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}M(t) = Ae^{At}e^{As} = AM(t) \\ M(0) = e^{As}. \end{cases}$$

La funzione matriciale

$$t \rightarrow N(t) := e^{A(t+s)}$$

risolve lo stesso problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}N(t) = Ae^{A(t+s)} = AN(t) \\ N(0) = e^{As} \end{cases}$$

per cui, dall'unicità della soluzione, $M(t) = N(t)$, $\forall t$ ossia vale (5.39). ■

DOMANDA: È vero o falso che per ogni matrice A, B , si ha

$$e^{A+B} = e^A e^B. \quad (5.40)$$

RISPOSTA: falso.

PROBLEMA Dimostrare che se $AB = BA$ (le matrici commutano) allora (5.40) vale.

SUGGERIMENTO Usando che A, B commutano si può usare la stessa dimostrazione per le serie numeriche.

ESERCIZIO Dare un'altra dimostrazione che se $AB = BA$ allora (5.40) vale: usare che sia $e^{At} e^{Bt}$, sia $e^{t(A+B)}$ risolvono il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}M(t) = (A+B)M(t) \\ M(0) = I. \end{cases}$$

Dall'unicità della soluzione vale (5.40).

La formula (5.38) ci da una espressione molto elegante per la soluzione di (5.37). Ma, per fornire la soluzione esplicita di una soluzione dobbiamo sapere calcolare l'esponenziale di una matrice.

ESEMPIO (Matrice diagonale) L'esponenziale della matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

risulta

$$e^D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Infatti, per ogni k , si ha

$$D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

e il risultato si ottiene sommando la serie.

ESERCIZIO (Matrice diagonalizzabile) Supponiamo che A sia diagonalizzabile, ossia esiste V invertibile tale che

$$A = V^{-1}DV$$

con D diagonale. Provare che

$$e^A = V^{-1}e^DV.$$

Suggerimento: $A^k = V^{-1}D^kV, \forall k$.

Per quanto visto nel paragrafo precedente, per risolvere i sistemi lineari nel caso ci sia un autovalore complesso, bisogna sapere calcolare la matrice esponenziale e^A dove

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO Provare che l'esponenziale

$$e^A = e^\alpha \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}$$

(il calcolo è immediato conoscendo la soluzione di $\dot{x} = Ax$ come già sappiamo, oppure si può calcolare l'esponenziale in modo diretto calcolando A^2, A^3 , etc).

5.6.1 Il caso di radici multiple

Per una matrice A in cui un autovalore λ compare con molteplicità sappiamo che si può usare la forma canonica di Jordan e trovare una base in cui A si decompone in blocchi di Jordan

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ 0 & \dots & & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

Calcoliamo in questo caso la matrice esponenziale e^{tA} . Scriviamo

$$A = \lambda I + N$$

dove

$$N := \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

é una matrice nilpotente, ossia

$$N^n = 0.$$

Infatti si ha che

$$N^k := \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ & & \dots & \dots & \\ & \dots & & 0 & 1 \\ 0 & \dots & & \dots & \\ 0 & & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Poiché λI commuta con qualsiasi matrice, si ha

$$e^{tA} = e^{t(\lambda I + N)} = e^{\lambda t I} e^{tN} = e^{t\lambda} e^{tN}.$$

Calcolando la somma finita

$$e^{Nt} = I + Nt + t^2 \frac{N^2}{2!} + \dots + t^{n-1} \frac{N^{n-1}}{(n-1)!}$$

si vede che

$$e^{tN} = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & \dots & t^{n-1}/(n-1)! \\ 0 & 1 & t & \dots & \\ 0 & \dots & 1 & & \\ & & & & t \\ 0 & 0 & & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

e, quindi,

$$e^{tA} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & \dots & t^{n-1}/(n-1)! \\ 0 & 1 & t & \dots & \\ 0 & \dots & 1 & & \\ & & & & t \\ 0 & 0 & & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO Nello spazio vettoriale dei polinomi di grado n con base

$$X := \left\langle 1, x, \frac{x^2}{2!}, \dots, \frac{x^n}{n!} \right\rangle$$

si consideri l'operatore di derivazione

$$D : X \rightarrow X, \quad D := \frac{d}{dx}.$$

Provare che D é nilpotente e che la matrice che rappresenta D é proprio N .

Provare che

$$e^{tN} = H^t$$

dove

$$H^t : X \rightarrow X, \quad H^t p(x) := p(x + t)$$

é l'operatore di traslazione di t .

Quindi e^{tN} é la matrice che rappresenta l'operatore di traslazione H^t .

SUGGERIMENTO Scrivere lo sviluppo di Taylor del polinomio p nel punto x con incremento t .

Ci sono poi altri modi per calcolare l'esponenziale di una matrice, basati sul teorema di Caley-Hamilton secondo cui $p(A) = 0$ dove $p(\lambda)$ è il polinomio caratteristico della matrice A . Quindi A^n si può esprimere mediante le potenze di A di ordine inferiore.

Non procederemo in questi conti: la analisi qualitativa delle soluzioni di un sistema lineare $\dot{x} = Ax$ è già completamente chiara.

Chapter 6

Dipendenza da dati iniziali e parametri

Di fondamentale importanza nelle applicazioni è sapere se cambiando poco il dato iniziale x_0 la soluzione di una equazione differenziale

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

cambia poco (continuità rispetto ai dati iniziali); e sapere, qualora si modifichi poco il campo vettoriale f , se la soluzione della equazione differenziale si modifichi poco.

6.1 Il lemma di Gronwall

Iniziamo enunciando a parte un utile lemma (abbiamo già provato enunciati simili nel lemma 3.2.1 e nei teoremi del confronto al capitolo 4).

Lemma 6.1.1 (Lemma di Gronwall) *Supponiamo che*

$$y(\cdot), z(\cdot) : [a, b) \rightarrow \mathbf{R},$$

$z(t) \geq 0$, siano funzioni continue soddisfacenti la disequazione integrale

$$y(t) \leq A + \int_a^t y(s)z(s) ds, \quad \forall t \in [a, b). \quad (6.1)$$

Allora

$$y(t) \leq Ae^{\int_a^t z(s) ds}, \quad \forall t \in [a, b).$$

DIMOSTRAZIONE. Si consideri la funzione di classe C^1 definita da $\varphi(t) := \int_a^t y(s)z(s) ds$. Si ha $\varphi(a) = 0$ e

$$\dot{\varphi}(t) = y(t)z(t) \stackrel{(6.1)}{\leq} z(t)\left(A + \int_a^t y(s)z(s) ds\right) = z(t)(A + \varphi(t)).$$

Se ne deduce, usando il teorema del confronto 4.1.4, che $\varphi(t) \leq \eta(t)$ dove

$$\begin{cases} \dot{\eta}(t) = z(t)(A + \eta(t)) \\ \eta(a) = 0. \end{cases}$$

La soluzione di questo problema è $\eta(t) = -A + Ae^{\int_a^t z(s) ds}$ e, quindi, otteniamo la maggiorazione

$$\varphi(t) \leq -A + Ae^{\int_a^t z(s) ds}.$$

In conclusione

$$y(t) \stackrel{(6.1)}{\leq} A + \varphi(t) \leq Ae^{\int_a^t z(s) ds}.$$

■

ESERCIZIO In aggiunta alle ipotesi precedenti supponiamo anche che $y(t) \geq 0$. Dimostrare nel seguente modo il Lemma di Gronwall. Per $A > 0$ si consideri la funzione $\varphi(t) := A + \int_a^t y(s)z(s) ds$, $\varphi(t) > 0$ per $t > 0$, e soddisfacente $\varphi(a) = A$. Differenziando

$$\dot{\varphi}(t) = y(t)z(t) \stackrel{(6.1)}{\leq} z(t)\left(A + \int_a^t y(s)z(s) ds\right) = z(t)\varphi(t)$$

da cui

$$\frac{\dot{\varphi}(t)}{\varphi(t)} \leq z(t)$$

e, integrando,

$$\int_a^t \frac{\dot{\varphi}(\tau)}{\varphi(\tau)} d\tau \leq \int_a^t z(\tau) d\tau$$

Si concluda il ragionamento. Andando al limite per $A \rightarrow 0$ si trova che se $A = 0$ allora $y(t) \equiv 0$.

Il lemma di Gronwall è un utile strumento per trovare ad esempio le maggiorazioni a priori per soluzioni di equazioni differenziali che garantiscono l'estendibilità delle soluzioni.

ESERCIZIO Dimostrare il lemma 3.2.1, e, quindi il teorema 3.2.1, dal Lemma di Gronwall.

ESERCIZIO Sia $f : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ una funzione continua soddisfacente

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq h(t)|x_1 - x_2|, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}^n$$

dove $h(t) \geq 0$ soddisfa

$$\int_{\mathbf{R}} h(t) dt < +\infty.$$

Si supponga, inoltre, che esiste $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$ tale che

$$\int_{\mathbf{R}} |f(t, \bar{x})| dt < +\infty.$$

Dimostrare che tutte le soluzioni di $\dot{x} = f(t, x)$ sono definite per tutti i tempi.

SOLUZIONE La soluzione massimale $x : (T^-, T^+) \rightarrow \mathbf{R}^n$ di

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

verifica

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau,$$

da cui

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq |x_0| + \left| \int_{t_0}^t |f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, \bar{x})| d\tau \right| + \left| \int_{t_0}^t |f(\tau, \bar{x})| d\tau \right| \\ &\leq |x_0| + \left| \int_{t_0}^t h(\tau)|x(\tau) - \bar{x}| d\tau \right| + \int_{\mathbf{R}} |f(t, \bar{x})| dt \\ &\leq |x_0| + \left| \int_{t_0}^t h(\tau)|x(\tau)| d\tau \right| + |\bar{x}| \int_{\mathbf{R}} h(t) dt + \int_{\mathbf{R}} |f(t, \bar{x})| dt. \end{aligned}$$

Applicando il Lemma di Gronwall troviamo, per $t > t_0$,

$$|x(t)| \leq A e^{\int_{t_0}^t h(\tau) d\tau} < +\infty$$

con $A := |x_0| + |\bar{x}| \int_{\mathbf{R}} h(t) dt + \int_{\mathbf{R}} |f(t, \bar{x})| dt$, e, quindi, $T^+ = +\infty$. Analogamente troviamo $T^- = -\infty$.

6.2 Dipendenza continua rispetto ai dati iniziali

Teorema 6.2.1 *Sia $f : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ una funzione continua, Lipschitziana rispetto alla seconda variabile uniformemente per $t \in \mathbf{R}$, i.e. esiste $L > 0$ tale che, $\forall t \in \mathbf{R}$,*

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbf{R}^n. \quad (6.2)$$

Siano $\varphi_1(t) := \varphi(t, x_1)$ e $\varphi_2(t) := \varphi(t, x_2)$ le soluzioni di $\dot{x} = f(t, x)$ con condizioni iniziali rispettivamente

$$\varphi_1(t_0) = x_1, \quad \varphi_2(t_0) = x_2.$$

Allora

$$|\varphi(t, x_1) - \varphi(t, x_2)| \leq |x_1 - x_2| e^{L|t-t_0|}. \quad (6.3)$$

DIMOSTRAZIONE. Notiamo che $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ sono definite per tutti i tempi. Si ha

$$\varphi_1(t) = x_1 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi_1(\tau)) d\tau$$

e

$$\varphi_2(t) = x_2 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi_2(\tau)) d\tau$$

da cui, sottraendo,

$$\varphi_1(t) - \varphi_2(t) = (x_1 - x_2) + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi_1(\tau)) - f(\tau, \varphi_2(\tau)) d\tau.$$

Usando (6.2) si ha

$$\begin{aligned} |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| &\leq |x_1 - x_2| + \left| \int_{t_0}^t |f(\tau, \varphi_1(\tau)) - f(\tau, \varphi_2(\tau))| d\tau \right| \\ &\leq |x_1 - x_2| + \left| \int_{t_0}^t L|\varphi_1(\tau) - \varphi_2(\tau)| d\tau \right|. \end{aligned}$$

Consideriamo dapprima $t > t_0$. Applicando il Lemma di Gronwall alla funzione $w(t) := |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|$ si deduce (6.3). Analogamente si ragiona per $t < t_0$. Farlo per esercizio. ■

Corollario 6.2.1 (Dipendenza continua rispetto ai dati iniziali) *Se la condizione iniziale x_2 tende a x_1 , allora la soluzione $\varphi(\cdot, x_2)$ converge uniformemente ad $\varphi(\cdot, x_1)$ su ogni intervallo di tempo limitato $[t_0 - T, t_0 + T]$.*

DIMOSTRAZIONE. Da (6.3) si ha

$$\|\varphi(\cdot, x_1) - \varphi(\cdot, x_2)\|_\infty := \sup_{t \in [t_0 - T, t_0 + T]} |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \leq |x_1 - x_2| e^{LT}.$$

■

Si trova anche un'altra dimostrazione della unicità della soluzione.

Corollario 6.2.2 (Unicità) *Se $x_2 = x_1$ allora $\varphi(\cdot, x_2) = \varphi(\cdot, x_1)$.*

Se una equazione non ha unicità delle soluzioni del problema di Cauchy allora non ci si può aspettare la dipendenza continua dai dati iniziali.

ESERCIZIO Si provi la affermazione precedente confrontando, ad esempio, le soluzioni di $\dot{x} = \sqrt{|x|}$ con dati iniziali $x(0) = 0$ ed $x(0) = \varepsilon$.

Concludiamo notando la **ottimalità della stima (6.3)**. Ad esempio, le soluzioni di $\dot{x} = Lx$ con dati iniziali $x(0) = x_1$ e $x(0) = x_2$, sono date rispettivamente da

$$\varphi(t, x_1) = x_1 e^{Lt}, \quad \varphi(t, x_2) = x_2 e^{Lt}$$

e, quindi,

$$\varphi(t, x_1) - \varphi(t, x_2) = (x_1 - x_2)e^{Lt}.$$

Questo mostra che la stima (6.3) è ottimale.

Si potrebbe anche dimostrare, ma lo omettiamo, che se il campo vettoriale $f \in C^k$, $k \geq 1$, allora la soluzione $\varphi(t, \cdot)$ è una funzione di classe C^k (dipendenza C^k dai dati iniziali).

6.3 Dipendenza continua rispetto ai parametri

Teorema 6.3.1 *Siano $f_1, f_2 : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ funzioni continue, Lipschitziane rispetto alla seconda variabile uniformemente per $t \in \mathbf{R}$, i.e. soddisfano (6.2), e, per un qualche $\varepsilon > 0$,*

$$|f_1(t, x) - f_2(t, x)| \leq \varepsilon, \quad \forall (t, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n. \quad (6.4)$$

Siano $\varphi_1(t)$ e $\varphi_2(t)$ le soluzioni rispettivamente di

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 = f_1(t, \varphi_1) \\ \varphi_1(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\varphi}_2 = f_2(t, \varphi_2) \\ \varphi_2(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Allora

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \leq \frac{\varepsilon}{L} (e^{L|t-t_0|} - 1). \quad (6.5)$$

DIMOSTRAZIONE. Notiamo che $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ sono definite per tutti i tempi. Si ha

$$\varphi_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f_1(\tau, \varphi_1(\tau)) d\tau$$

e

$$\varphi_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f_2(\tau, \varphi_2(\tau)) d\tau$$

da cui, sottraendo,

$$\varphi_1(t) - \varphi_2(t) = \int_{t_0}^t f_1(\tau, \varphi_1(\tau)) - f_2(\tau, \varphi_2(\tau)) d\tau.$$

Si ha

$$\begin{aligned} |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| &\leq \left| \int_{t_0}^t |f_1(\tau, \varphi_1(\tau)) - f_1(\tau, \varphi_2(\tau))| d\tau \right| \\ &\quad + \left| \int_{t_0}^t |f_1(\tau, \varphi_2(\tau)) - f_2(\tau, \varphi_2(\tau))| d\tau \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t L|\varphi_1(\tau) - \varphi_2(\tau)| d\tau \right| + \left| \int_{t_0}^t \varepsilon d\tau \right|. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Facciamo il caso $t > t_0$. Ponendo

$$w(t) := \varepsilon + L|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|$$

si deduce da (6.6),

$$\frac{w(t) - \varepsilon}{L} = |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \leq \int_{t_0}^t L|\varphi_1(\tau) - \varphi_2(\tau)| + \varepsilon = \int_{t_0}^t w(\tau)$$

ossia

$$w(t) = \varepsilon + L \int_{t_0}^t w(\tau) d\tau.$$

Dal lemma di Gronwall,

$$w(t) \leq \varepsilon e^{L(t-t_0)}$$

da cui si ricava (6.5). Analogamente si ragiona per $t < t_0$. ■

Corollario 6.3.1 (Dipendenza continua rispetto ai parametri) *Se f_2 converge a f_1 uniformemente su $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$, allora la soluzione $\varphi_2(\cdot)$ converge uniformemente a $\varphi_1(\cdot)$ su ogni intervallo di tempo limitato $[t_0 - T, t_0 + T]$.*

Notiamo anche qui la **ottimalità della stima (6.5)**. Ad esempio, le soluzioni di

$$\begin{cases} \dot{x} = Lx + \varepsilon \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = Lx \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

sono date rispettivamente da

$$\varphi_1(t) = x_0 e^{Lt} + \frac{\varepsilon}{L}(e^{Lt} - 1), \quad \varphi_2(t) = x_0 e^{Lt}$$

(la prima equazione é lineare, non omogenea) e, quindi,

$$\varphi_1(t) - \varphi_2(t) = \frac{\varepsilon}{L}(e^{Lt} - 1).$$

Questo mostra che la stima (6.5) è ottimale.

Chapter 7

Studi qualitativi nel piano

Per concludere vediamo come procedere per lo studio qualitativo di sistemi non lineari nel piano

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y). \end{cases} \quad (7.1)$$

Le soluzioni più semplici da trovare sono le soluzioni costanti nel tempo $(x(t), y(t)) = (x_0, y_0)$, cioè gli equilibri, dove

$$\begin{cases} f(x_0, y_0) = 0 \\ g(x_0, y_0) = 0. \end{cases}$$

Poi è conveniente studiare il sistema linearizzato ai punti di equilibrio

$$\begin{cases} \dot{x} = \partial_x f(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_y f(x_0, y_0)(y - y_0) \\ \dot{y} = \partial_x g(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_y g(x_0, y_0)(y - y_0) \end{cases}$$

che darà indicazioni sulla dinamica di (7.1) vicino agli equilibri. Con la traslazione degli assi

$$X = x - x_0, \quad Y = y - y_0$$

si ottiene il sistema lineare del primo ordine a coefficienti costanti

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} \partial_x f & \partial_y f \\ \partial_x g & \partial_y g \end{pmatrix}$$

è la matrice Jacobiana calcolata in (x_0, y_0) . Si calcolano gli autovalori di A e le traiettorie di (7.2) saranno o fuochi, o centri, o selle, etc..., come descritto nella sezione 5.5.

Un importante teorema di Hartmann-Grobmann (di cui non daremo la dimostrazione) afferma che, se la parte reale degli autovalori di A è diversa da zero, allora il sistema non lineare (7.1) è ben descritto, in un intorno del punto di equilibrio, dal sistema lineare (7.2). Più precisamente le traiettorie del sistema lineare (7.2) e del sistema non lineare (7.1) sono topologicamente equivalenti e questo permette di disegnare localmente vicino agli equilibri le soluzioni del sistema non lineare (7.1).

Si studia poi il luogo dove $f(x, y) = 0$ in cui il campo vettoriale è "verticale" e il luogo dove $g(x, y) = 0$ in cui il campo vettoriale è "orizzontale".

Infine, la equazione delle traiettorie sarà descritta dalla equazione scalare non autonoma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}$$

dove $g(x, y) \neq 0$ e da

$$\frac{dx}{dy} = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}$$

dove $f(x, y) \neq 0$. Avevamo già incontrato questo procedimento in (4.16).

ESEMPIO (Sistema di Lotka-Volterra) Si studino le traiettorie di

$$\begin{cases} \dot{x} = kx - axy \\ \dot{y} = -ly + bxy \end{cases} \quad (7.3)$$

con $a, b, k, l > 0$ nella regione $x > 0, y > 0$.

Gli equilibri sono $(0, 0)$ e $(x, y) = (k/a, l/b)$. (Per esercizio, si linearizzi il sistema (7.3) in questo secondo equilibrio e si provi che il sistema linearizzato è un centro).

La equazione delle traiettorie di (7.3) è data da

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(-l + bx)y}{x(k - ay)}$$

che è esatta e a variabili separabili. Integrata da

$$bx - l \ln x + ay - k \ln y = C.$$

Le soluzioni di (7.3) vivono dunque sulle curve di livello dell'integrale primo

$$I(x, y) := (bx - l \ln x) + (ay - k \ln y)$$

(si verifichi direttamente dalle equazioni che I è un integrale primo di (7.3)). Bisogna capire il grafico di $I(x, y)$. La funzione di una variabile $q(x) :=$

$bx - l \ln x$ è strettamente convessa, ha un unico punto di minimo in $x = l/b$, e tende a $+\infty$ sia per $x \rightarrow 0^+$, sia per $x \rightarrow +\infty$. Analogamente la funzione $p(y) := by - l \ln y$. Pertanto la funzione $I(x, y) = q(x) + p(y)$ ha un unico punto di minimo in $(x, y) = (l/b, k/a)$, è strettamente convessa e tende all'infinito per $|(x, y)| \rightarrow +\infty$. Le sue curve di livello di I sono curve chiuse, in particolare compatte. Quindi tutte le soluzioni di (7.3) esistono per tutti i tempi e sono funzioni periodiche nel tempo.

Si può da queste informazioni disegnare l'andamento qualitativo di tutte le traiettorie (ritratto in fase).

ESERCIZIO Si studino le traiettorie di

$$\begin{cases} \dot{x} = x(y^2 - 1) \\ \dot{y} = y(x^2 - 1) \end{cases} \quad (7.4)$$

Per simmetria basta studiarlo in $x \geq 0, y \geq 0$. In questa regione i punti di equilibrio sono $(x, y) = (0, 0)$ ed $(x, y) = (1, 1)$.

Per esercizio, si linearizzi il sistema (7.4) in $(0, 0)$ e in $(1, 1)$. Si provi che entrambi i sistemi linearizzati sono selle. Si calcolino gli autovalori e gli autovettori e si disegni il grafico qualitativo delle soluzioni di questi sistemi lineari.

Notiamo poi che $\{y = 0\}$ è un sottospazio *invariante* per (7.4), ossia che se parto con dato iniziale $(x_0, y_0) = (x_0, 0)$, allora la soluzione rimane in $\{y = 0\}$ per tutti i tempi. Infatti $(x(t), y(t)) = (x(t), 0)$ è soluzione di (7.4) con $\dot{x} = -x$, ossia $x(t) = x_0 e^{-t}$.

Analogamente $\{x = 0\}$ è un sottospazio *invariante* per (7.4). Provarlo. Quale è la soluzione con dato iniziale $(x_0, y_0) = (0, y_0)$?

Risposta: $(x(t), y(t)) = (0, y_0 e^{-t})$.

La equazione delle traiettorie risulta

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 - 1)y}{x(y^2 - 1)}$$

che è a variabili separabili. Integrata da

$$\frac{y^2}{2} - \ln y + \frac{x^2}{2} - \ln x = C.$$

Le soluzioni di (7.4) vivono dunque sulle curve di livello dell'integrale primo

$$I(x, y) := q(y) - q(x) := \left(\frac{y^2}{2} - \ln y\right) - \left(\frac{x^2}{2} - \ln x\right)$$

(si verifichi direttamente dalle equazioni che I è un integrale primo di (7.4)). Bisogna capire il grafico di $I(x, y)$. La funzione di una variabile $q(x)$ è strettamente convessa, ha un unico punto di minimo in $x = 1$, e tende a $+\infty$ sia

per $x \rightarrow 0^+$, sia per $x \rightarrow +\infty$. Pertanto la funzione $I(x, y) = q(y) - q(x)$ ha un unico punto critico in $(x, y) = (1, 1)$ che è di sella. Le curve di livello di I sono topologicamente delle iperboli.

Infine notiamo che la bisettrice $x = y$ è anch'essa un sottospazio invariante per (7.4) (contenuto in $I(x, y) = 0$).

Si può da queste informazioni disegnare l'andamento qualitativo di tutte le traiettorie (ritratto in fase).

ESERCIZIO Provare che ogni soluzione $(x(t), y(t))$ di

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - x - y) \\ \dot{y} = y(1 - x - y) \end{cases} \quad (7.5)$$

con dati iniziali $x(0) := x_0 > 0$, $y(0) := y_0 > 0$, è definita per tutti i tempi $[0, +\infty)$ e risulta $x(t) > 0$, $y(t) > 0$, $\forall t \in [0, +\infty)$.

SUGGERIMENTO Notiamo che i sottospazi $\{x = 0\}$ e $\{y = 0\}$ sono invarianti per (7.5). Trovare gli equilibri del campo. Vedere che, se $y > x - 1$, allora sia $f(x, y) := x(1 - x - y) < 0$, sia $g(x, y) := y(1 - x - y) < 0$. Questo mostra che sia $x(t)$ sia $y(t)$ sono limitate per tutti i tempi $(0, T^+)$. Perché? Concludere che $T^+ = +\infty$.

Come ulteriore esempio consideriamo

$$\begin{cases} \dot{x} = y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} = -x + y(1 - x^2 - y^2) \end{cases} \quad (7.6)$$

Si prova che l'unico equilibrio è $(x, y) = (0, 0)$. Farlo per esercizio. Provare anche che il sistema linearizzato in $(0, 0)$ ossia

$$\begin{cases} \dot{x} = y + x \\ \dot{y} = -x + y \end{cases} \quad (7.7)$$

risulta un fuoco instabile (autovalori $1 \pm i$).

La forma del campo suggerisce l'uso delle coordinate polari

$$\rho := \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta := \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Il campo si trasforma in

$$\dot{\rho} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \rho(1 - \rho^2)$$

e

$$\dot{\theta} = \frac{1}{1 + (y^2/x^2)} \frac{\dot{y}x - y\dot{x}}{x^2} = -1$$

con facili calcoli. La soluzione di questa seconda equazione risulta

$$\theta(t) := \theta(0) - t$$

(l'angolo θ gira con velocità angolare costante). La prima equazione è una equazione scalare autonoma che sappiamo studiare bene. Ha per equilibri $\rho = 0$ e $\rho = 1$. Tutte le soluzioni con $\rho(0) \in (0, 1)$ sono monotone crescenti e tendono a 1 per $t \rightarrow +\infty$ mentre tendono a 0 per $t \rightarrow -\infty$ (perché sono definite per tutti i tempi?).

Tutte le soluzioni con $\rho(0) > 1$ sono monotone decrescenti e tendono a 1 per $t \rightarrow +\infty$. Non sono definite per tutti i tempi negativi. Provarlo. Si trovi per esercizio anche la formula esplicita.

Tornando alla descrizione delle traiettorie di (7.6) si deduce che:

- (i) Se $\rho(0) = 1$ la soluzione risulta $\rho(t) = 1, \forall t$, ed $\theta(t) = \theta_0 - t$. Il sistema (7.6) ha un'orbita periodica di periodo 2π (ciclo limite).
- (ii) Se $0 < \rho(0) < 1$ la soluzione soddisfa $\rho(t) \rightarrow 1$ per $t \rightarrow +\infty$, e $\rho(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow -\infty$. La soluzione spiraleggia (con periodo 2π) e si accumula sul ciclo limite.
- (iii) Se $\rho(0) > 1$ la soluzione soddisfa $\rho(t) \rightarrow 1$ per $t \rightarrow +\infty$ mentre $\rho(t) \rightarrow -\infty$ in tempo finito. La soluzione spiraleggia (con periodo 2π) accumulandosi sul ciclo limite.

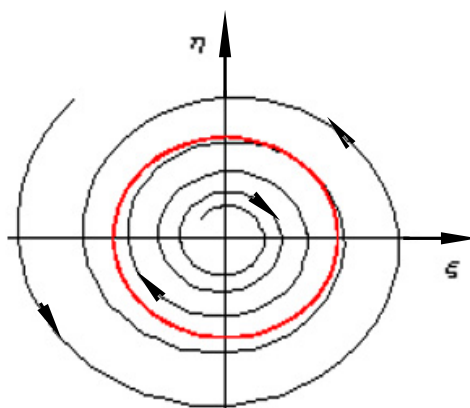


Figure 7.1: Il ciclo limite.

L'andamento delle soluzioni di (7.6) è perfettamente chiaro.

ESERCIZIO Si disegni il ritratto in fase delle soluzioni di

$$\begin{cases} \dot{x} = y + x(a - x^2 - y^2) \\ \dot{y} = -x + y(a - x^2 - y^2) \end{cases} \quad (7.8)$$

al variare del parametro $a \in \mathbf{R}$.

SUGGERIMENTO: Procedendo come nell'esercizio precedente si vede che, se $a > 0$, il sistema (7.8) ha un ciclo limite. Per $a \leq 0$ tutte le soluzioni spiraleggiano verso l'origine.

ESERCIZIO Disegnare la soluzione di

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{x - y - 2}{x + y} \\ y(1) = 1. \end{cases} \quad (7.9)$$

Cercarne una formula analitica esplicita.

SUGGERIMENTO Un modo consiste nel vedere (7.9) come la equazione delle traiettorie del sistema piano

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = x - y - 2. \end{cases}$$

L'unico equilibrio é $(1, -1)$. Traslando gli assi $X = x - 1, Y = y + 1$, troviamo il sistema lineare a coefficienti costanti

$$\begin{cases} \dot{X} = X + Y \\ \dot{Y} = X - Y \end{cases}$$

di cui sappiamo ben disegnare l'andamento delle soluzioni.

Naturalmente un altro modo è studiare (7.9) direttamente con i metodi del capitolo 4. In particolare l'equazione (7.9) è esatta. Si riveda anche l'esercizio (4.17). Farlo per esercizio.

In generale, è conveniente vedere un'equazione del primo ordine come

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + bx + c}{dx + ey + f}$$

come la equazione delle traiettorie del sistema piano

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + bx + c \\ \dot{y} = dx + ey + f. \end{cases}$$

ESERCIZIO Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^2 - xy + x \\ \dot{y} = -y^2 - xy + y \end{cases}$$

con condizioni iniziali $x(0) = x_0 > 0$, $y(0) = y_0 > 0$. Provare che la soluzione $(x(t), y(t))$ è definita per tutti i tempi e $x(t) > 0$, $y(t) > 0$, $\forall t \geq 0$.

SUGGERIMENTO Si provi che i sottospazi $\{x = 0\}$ e $\{y = 0\}$ sono invarianti. Gli equilibri del sistema formano la retta $1 - x = y$. Si trovi dove ambedue le componenti del campo $(-x - y + 1)x$ e $(-y - x + 1)y$ sono negative. Se ne deduca che la soluzione $(x(t), y(t))$ è confinata a priori in alcune regioni.

Alcune equazioni del secondo ordine si possono risolvere in questo modo, dopo averle ricondotte ad un sistema di equazioni differenziali nel piano.

ESERCIZIO Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2x\dot{x} \\ x(0) = 0, \dot{x}(0) = 1 \end{cases} \quad (7.10)$$

e dire in quale intervallo di tempo è definita la soluzione.

SOLUZIONE Ponendo $y(t) := \dot{x}(t)$ trasformiamo la equazione del secondo ordine (7.10) nel sistema di equazioni differenziali del primo ordine nel piano

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = 2xy \\ x(0) = 0, y(0) = 1. \end{cases} \quad (7.11)$$

È particolarmente facile scrivere la equazione delle traiettorie

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

che integrata da $y(x) = x^2 + c$. La costante c è determinata dalle condizioni iniziali. Le orbite di (7.11) vivono sulla parabola $y = x^2 + 1$.

Ma ora ci domandiamo se le soluzioni di (7.11) tracciano tutta tale parabola. Ebbene la equazione soddisfatta è $\dot{x} = x^2 + 1$ le cui soluzioni, come ben sappiamo, divergono in tempo finito. Qual'è l'intervallo massimale di definizione della soluzione $x(t)$ di (7.11)?

ESERCIZIO Dimostrare che tutte le soluzioni di

$$\ddot{x} = e^{-x^2} - \ln t \quad (7.12)$$

sono definite per tutti i tempi $t > 0$. Provare che $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = -\infty$.

SUGGERIMENTO Scrivendo il sistema del primo ordine equivalente

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = e^{-x^2} - \ln t \end{cases}$$

si vede che si può applicare il teorema di estensione globale 3.2.2. Poi, si ha $\ddot{x} \leq 1 - \ln(t)$, $\forall t$, ed integrando si vede che $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = -\infty$.

ESERCIZIO Dimostrare che le soluzioni non nulle di

$$\ddot{x} = x^2 + (\dot{x})^2 \quad (7.13)$$

non sono definite per tutti i tempi t .

SUGGERIMENTO Scriviamo il sistema del primo ordine equivalente

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = x^2 + v^2. \end{cases}$$

Nell'intervallo massimale di definizione di ciascuna soluzione si ha $\dot{v} \geq v^2$. Applicando il teorema del confronto si concluda.

ESERCIZIO Dimostrare che la soluzione dell'equazione di Newton

$$\begin{cases} \ddot{x} = -x^3 \\ x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \quad (7.14)$$

è definita per tutti i tempi t ed è una funzione periodica.

SUGGERIMENTO Il sistema del primo ordine associato

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -x^3 \end{cases} \quad (7.15)$$

ha l'integrale primo della energia

$$E(x, v) = \frac{v^2}{2} + \frac{x^4}{4}$$

L'unico equilibrio di (7.15) è $(0, 0)$ e tutte le curve di livello $E(x, v) = cost > 0$ sono compatte e topologicamente dei cerchi. Si concluda.

Chapter 8

Il teorema della funzione implicita

8.1 Introduzione

Il problema della funzione implicita è il seguente. Data una equazione del tipo

$$F(x, y) = 0 \quad (8.1)$$

dove F è una mappa regolare vogliamo sapere se, localmente attorno ad una soluzione (x_0, y_0) (ossia $F(x_0, y_0) = 0$), l'insieme delle soluzioni (x, y) di (8.1) sia esplicitabile come il grafico di una funzione $y = y(x)$ o $x = x(y)$.

ESEMPIO 1 L'insieme delle soluzioni di $F(x, y) = 2y - x^2 = 0$ è il grafico della parabola $y = x^2/2$, abbiamo, cioè, esplicitato y in funzione di x . In un intorno di $(0, 0)$ lo stesso insieme $F(x, y) = 0$ non è il grafico di nessuna funzione nella variabile y (perchè?), ossia non possiamo esplicitare x in funzione di y .

ESEMPIO 2 L'insieme delle soluzioni di $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ è la circonferenza di centro l'origine e raggio 1. In un intorno (quale?) del punto $(1, 0)$ possiamo esplicitare tale insieme come $x = \sqrt{1 - y^2}$, ma non possiamo esplicitare y in funzione di x (perchè?). In un intorno (quale?) del punto $(0, 1)$ possiamo esplicitare l'insieme $\{F(x, y) = 0\}$ come $y = \sqrt{1 - x^2}$, ma non come il grafico di una funzione di y .

ESEMPIO 3 L'insieme delle soluzioni di $F(x, y) = x^2 - y^2 = 0$ è l'unione delle bisettrici $y = \pm x$. In nessun intorno di $(0, 0)$ l'insieme $\{F(x, y) = 0\}$ è rappresentabile come il grafico di una funzione nè di x nè di y .

Un problema assai collegato è il problema della invertibilità locale di una funzione.

Nel caso che $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ sia una funzione di classe C^1 e

$$f'(x_0) \neq 0,$$

allora è ben noto che la funzione $f(\cdot)$ è localmente monotona, e, dunque, invertibile. Inoltre la funzione inversa $f^{-1}(\cdot)$, definita in un intorno di y_0 , è di classe C^1 e la derivata della funzione inversa è

$$Df^{-1}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \neq 0.$$

Il problema che ci poniamo è stabilire la invertibilità locale di una funzione $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ e di una funzione $f : X \rightarrow Y$ definita tra 2 spazi di Banach eventualmente di dimensione infinita.

La dimostrazione dei teoremi sia della funzione implicita sia della mappa inversa è la medesima quando gli spazi siano finiti o infinito dimensionali. La daremo quindi nel caso generale.

8.2 Operatori lineari

Considereremo nel seguito spazi vettoriali normati X, Y, Z con norme rispettivamente $\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_Y, \|\cdot\|_Z$. Se non c'è rischio di confusione ometteremo il simbolo a pedice e indicheremo la norma solo con $\|\cdot\|$.

Teorema 8.2.1 *Sia $A : X \rightarrow Y$ una applicazione lineare. Sono equivalenti le seguenti affermazioni*

i) A è continuo in ogni punto $x \in X$

ii) A è continuo in 0

$$\text{iii) } \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| < +\infty$$

DIMOSTRAZIONE. *$i) \Rightarrow ii)$ è ovvio. Proviamo che $ii) \Rightarrow i)$. $\forall \varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $\forall \|h\| \leq \delta$ si ha $\|Ah\| \leq \varepsilon$. Sia $x \in X$ qualsiasi. Per la linearità di A abbiamo*

$$\|A(x+h) - Ax\| = \|Ah\| \leq \varepsilon$$

per $\|h\| \leq \delta$, provando la continuità di A in x .

iii) $\Rightarrow ii)$. Se $x \neq 0$, $\|Ax\| \leq \|x\|C$ dove $C := \sup_{x \neq 0} \|Ax\|/\|x\| < +\infty$. Questo implica la continuità di A in 0.

ii) $\Rightarrow iii)$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $\forall \|h\| \leq \delta$ si ha $\|Ah\| \leq \varepsilon$. Per

un qualsiasi $x \neq 0$ considero l'elemento $h := \delta x / \|x\|$ avente norma uguale a δ . Per quanto sopra

$$\left\| A \left(\frac{\delta x}{\|x\|} \right) \right\| \leq \varepsilon$$

da cui, per la linearità di A ,

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \frac{\varepsilon}{\delta} \quad \text{e, quindi,} \quad \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \frac{\varepsilon}{\delta} < +\infty.$$

■

Definiamo lo spazio vettoriale

$$\mathcal{L}(X, Y) := \{A : X \rightarrow Y, \text{ lineari e continui}\}$$

con la norma

$$\|A\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

ESERCIZIO Dimostrare che $\|A\|$ è una norma (confronta con la norma matriciale introdotta alla sezione 5.6).

Se $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ e $B \in \mathcal{L}(Y, Z)$ allora $BA \in \mathcal{L}(X, Z)$ e

$$\|BA\| \leq \|B\| \|A\|. \quad (8.2)$$

Definizione 8.2.1 Diremo che una applicazione $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ è invertibile se esiste $C \in \mathcal{L}(Y, X)$ tale che

$$A \circ C = I_Y, \quad C \circ A = I_X.$$

dove I_X, I_Y indicano la mappa identità rispettivamente in X e in Y . La applicazione lineare $C =: A^{-1}$ si dice l'inversa di A .

Indicheremo con $GL(X, Y) \subset \mathcal{L}(X, Y)$ l'insieme delle applicazioni lineari invertibili da X in Y .

Teorema 8.2.2 Sia $A \in GL(X, Y)$ un operatore invertibile. Per ogni $B \in \mathcal{L}(X, Y)$ tale che

$$\|B\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|} \quad (8.3)$$

l'operatore $A + B$ è invertibile e

$$\|(A + B)^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \|B\|}. \quad (8.4)$$

DIMOSTRAZIONE. Vogliamo provare che per ogni $y \in Y$ esiste un'unico $x \in X$ tale che

$$(A + B)x = y.$$

Questa equazione è equivalente a

$$x = A^{-1}y - A^{-1}Bx$$

ossia a trovare un unico punto fisso della mappa $\Phi : X \rightarrow X$ definita da

$$\Phi(x) := A^{-1}y - A^{-1}Bx.$$

Proviamo che Φ è una contrazione. Poichè

$$\|\Phi(x_1) - \Phi(x_2)\| = \|A^{-1}B(x_1 - x_2)\| \stackrel{(8.2)}{\leq} \|A^{-1}\| \|B\| \|x_1 - x_2\|,$$

se vale (8.3), Φ è una contrazione ed ammette, per il teorema di Banach Caccioppoli, un unico punto fisso $x := (A + B)^{-1}y$. Inoltre

$$\|x\| = \|\Phi(x)\| \leq \|A^{-1}y\| + \|A^{-1}Bx\| \leq \|A^{-1}\| \|y\| + \|A^{-1}\| \|B\| \|x\|$$

da cui

$$\|x\| (1 - \|A^{-1}\| \|B\|) \leq \|A^{-1}\| \|y\|$$

ossia

$$\|(A + B)^{-1}y\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \|B\|} \|y\|.$$

L'applicazione lineare inversa B è continua e vale (8.4). ■

Corollario 8.2.1 $GL(X, Y)$ è un sottoinsieme aperto di $\mathcal{L}(X, Y)$.

ESERCIZIO (**Serie di Neumann**) Provare che, per $\|A^{-1}\| \|B\| < 1$, l'inversa di $A + B$ si può rappresentare mediante la serie di potenze

$$(A + B)^{-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (A^{-1}B)^n \right) A^{-1}. \quad (8.5)$$

Dedurre un'altra dimostrazione della (8.4).

SOLUZIONE Notiamo che la serie in (8.5) è totalmente convergente poichè

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (A^{-1}B)^n \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|(A^{-1}B)^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} (\|A^{-1}\| \|B\|)^n < \infty.$$

Scriviamo $A + B = A(I + A^{-1}B)$. Per ogni N , si ha

$$(I + A^{-1}B) \sum_{n=0}^N (-1)^n (A^{-1}B)^n = I + (-1)^N (A^{-1}B)^{N+1}$$

e, andando al limite per $N \rightarrow +\infty$,

$$(I + A^{-1}B) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (A^{-1}B)^n = I$$

ossia $(I + A^{-1}B)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (A^{-1}B)^n$, da cui (8.5).

8.3 Richiami di calcolo differenziale

Una funzione $f : U \subset X \rightarrow Y$ definita in un sottoinsieme aperto U di X si dice differenziabile in $x_0 \in U$ se esiste $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ tale che

$$\frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah\|_Y}{\|h\|_X} \rightarrow 0 \quad \text{per} \quad \|h\|_X \rightarrow 0. \quad (8.6)$$

Tale mappa A si chiama derivata di f in x_0 e si indica con $Df(x_0)$, $f'(x_0)$, $\partial f(x_0)$.

ESERCIZIO Dimostrare l'unicità del differenziale.

ESERCIZIO Dimostrare che se f è differenziabile in x_0 allora f è anche continua in x_0 .

ESERCIZIO Dimostrare che la mappa $f : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$ che trasforma una funzione continua $g(x)$ nel suo quadrato $g^2(x)$ è differenziabile in ogni punto $g \in C([0, 1])$ e che $Df(g) : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$ è l'operatore di "moltiplicazione"

$$h(x) \rightarrow 2g(x)h(x).$$

SOLUZIONE Si ha $\|(g+h)^2 - g^2 - 2gh\|_{\infty} = \|h^2\|_{\infty} \leq \|h\|_{\infty}^2$.

Diremo che $f \in C^1(U, Y)$ se f è differenziabile in ogni punto di U e

$$Df : U \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$$

è continua. Analogamente possiamo definire le derivate successive di f .

Dato $v \in X$ diciamo che f è derivabile in $x_0 \in U$ nella direzione v se esiste finito

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t},$$

ossia se la funzione $t \rightarrow f(x_0 + tv)$ è derivabile in $t = 0$.

Se f è differenziabile in x_0 secondo la definizione (8.6) allora f è derivabile in ogni direzione $v \in X$ e la derivata di f in x_0 nella direzione v vale $Df(x_0)[v]$ (dimostrarlo per esercizio). Il viceversa è falso come mostra il seguente classico controesempio.

ESERCIZIO Dimostrare che la funzione $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^4 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ha tutte le derivate direzionali in $(0, 0)$ ma non è differenziabile in $(0, 0)$.

Faremo uso ripetuto del teorema della media integrale: se $f \in C^1(U, Y)$ ed U è un insieme convesso, allora $\forall x_1, x_2 \in U$,

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x_1 + t(x_2 - x_1)) dt \\ &= \int_0^1 Df(x_1 + t(x_2 - x_1))[x_2 - x_1] dt. \end{aligned}$$

ESERCIZIO La mappa $[\cdot]^{-1} : GL(X, Y) \rightarrow GL(Y, X)$ definita da

$$A \rightarrow A^{-1} \tag{8.7}$$

è di classe C^∞ .

SOLUZIONE Sia $A \in GL(X, Y)$. Per $\|H\| < 1/\|A^{-1}\|$ la mappa inversa è definita dalla serie di potenze

$$(A + H)^{-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (A^{-1}H)^n \right) A^{-1}$$

che converge totalmente. Notiamo che anche le serie di tutte le derivate converge totalmente. Per il criterio di derivazione per serie la mappa $H \rightarrow (A + H)^{-1}$ è di classe C^∞ .

8.4 Il teorema della funzione implicita

Teorema 8.4.1 *Siano X, Y, Z spazi di Banach. Sia*

$$F : U \subset X \times Y \rightarrow Z$$

una funzione definita in un aperto U e $(x_0, y_0) \in U$ tale che

$$F(x_0, y_0) = 0. \tag{8.8}$$

Supponiamo che

- a) F sia continua in U .
- b) $\forall (x, y) \in U$ esiste $\partial_y F(x, y) \in \mathcal{L}(Y, Z)$, continua in U .
- c) $\partial_y F(x_0, y_0) \in GL(Y, Z)$.

Allora

- i) Esiste $r > 0$, $\delta > 0$, ed una unica funzione continua

$$f : B_r(x_0) := \{x \in X \mid \|x - x_0\| \leq r\} \rightarrow B_\delta(y_0) \subset Y$$

tale che $f(x_0) = y_0$ ed

$$F(x, f(x)) = 0.$$

Viceversa, per ogni soluzione $(x, y) \in B_r(x_0) \times B_\delta(y_0)$ di $F(x, y) = 0$, si ha $y = f(x)$.

- ii) Se $F \in C^1(U)$ allora $f(x)$ è derivabile in $\text{int}(B_r(x_0))$ e

$$D_x f(x) = -[\partial_y F(x, y)]^{-1} \partial_x F(x, y) \quad \text{dove } y = f(x).$$

- iii) Infine, se $F \in C^k(U)$, $k > 1$, allora $f \in C^k$.

Osservazioni 8.4.1 1) Notiamo che se Y, Z hanno dimensione finita allora la ipotesi c) può essere verificata solo se Y e Z hanno la stessa dimensione, i.e. $Y = \mathbf{R}^n = Z$ per qualche $n \in \mathbf{N}$.

2) Naturalmente, se $\partial_x F(x_0, y_0) \in GL(X, Z)$ possiamo esprimere x come funzione di y .

DIMOSTRAZIONE. Per semplicità di notazione sia $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Scriviamo

$$F(x, y) = F(0, 0) + \partial_y F(0, 0)y + R(x, y) = Ay + R(x, y) \quad (8.9)$$

dove, per brevità,

$$A := \partial_y F(0, 0)$$

ed

$$R(x, y) = F(x, y) - Ay. \quad (8.10)$$

Dalla scrittura (8.9)

$$F(x, y) = 0 \iff y = -A^{-1}R(x, y).$$

Lemma 8.4.1 *Esistono $r, \delta > 0$ tale che, $\forall x \in B_r(0)$ l'operatore*

$$\Phi(x, \cdot) := -A^{-1}R(x, \cdot)$$

è una contrazione in una palla $B_\delta(0) := \{y \in Y \mid \|y\| \leq \delta\}$.

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo

$$\varepsilon := \frac{1}{2\|A^{-1}\|}.$$

Per la continuità di $\partial_y F(x, y)$ in $(0, 0)$, esistono $\delta > 0$, $r_1 > 0$ tali che $\forall \|x\| \leq r_1$, $\forall y_1, y_2 \in B_\delta(0)$, $\forall t \in [0, 1]$, vale

$$\left\| \partial_y F(x, ty_2 + (1-t)y_1) - \partial_y F(0, 0) \right\| \leq \varepsilon. \quad (8.11)$$

Poichè $F(0, 0) = 0$ ed $F(x, y)$ è continua in $(0, 0)$ esiste $0 < r \leq r_1$ tale che

$$\|F(x, 0)\| \leq \frac{\delta}{2\|A^{-1}\|}. \quad (8.12)$$

Verifichiamo la affermazione del lemma con questi $\delta, r > 0$ appena trovati.

In primo luogo, $\forall x \in B_r(0)$, $\forall y_1, y_2 \in B_\delta(0)$,

$$\begin{aligned} R(x, y_2) - R(x, y_1) &= F(x, y_2) - Ay_2 - F(x, y_1) + Ay_1 \\ &= F(x, y_2) - F(x, y_1) - \partial_y F(0, 0)[y_2 - y_1] \\ &= \int_0^1 \left(\partial_y F(x, ty_2 + (1-t)y_1) - \partial_y F(0, 0) \right) [y_2 - y_1] dt \end{aligned}$$

usando il teorema della media integrale.

Quindi, da (8.11),

$$\|R(x, y_2) - R(x, y_1)\| \leq \varepsilon \|y_2 - y_1\|$$

e, pertanto, $\forall x \in B_r(0)$, $\forall y_1, y_2 \in B_\delta(0)$,

$$\begin{aligned} \|\Phi(x, y_2) - \Phi(x, y_1)\| &\leq \|A^{-1}\| \|R(x, y_2) - R(x, y_1)\| \\ &\leq \varepsilon \|A^{-1}\| \|y_2 - y_1\| \\ &= \frac{1}{2} \|y_2 - y_1\|. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Mostriamo adesso che

$$\forall x \in B_r(0) \implies \Phi(x, \cdot) : B_\delta(0) \rightarrow B_\delta(0). \quad (8.14)$$

$\forall y \in B_\delta(0)$ abbiamo

$$\begin{aligned} \|\Phi(x, y)\| &\leq \|\Phi(x, 0)\| + \|\Phi(x, y) - \Phi(x, 0)\| \\ &\stackrel{(8.13)}{\leq} \|\Phi(x, 0)\| + \frac{1}{2}\|y\| \\ &\leq \|\Phi(x, 0)\| + \frac{\delta}{2}. \end{aligned} \quad (8.15)$$

Ora

$$\Phi(x, 0) := -A^{-1}R(x, 0) = -A^{-1}F(x, 0)$$

da cui

$$\begin{aligned} \|\Phi(x, 0)\| &\leq \|A^{-1}F(x, 0)\| \\ &\leq \|A^{-1}\| \|F(x, 0)\| \end{aligned} \quad (8.16)$$

$$\stackrel{(8.12)}{\leq} \frac{\delta}{2}. \quad (8.17)$$

Da (8.15) e (8.17) si ricava che $\forall x \in B_r(0)$, $\forall y \in B_\delta(0)$ si ha $\|\Phi(x, y)\| \leq \delta$, ossia (8.14). Inoltre, da (8.13), la mappa $\Phi(x, \cdot)$ è una contrazione in $B_\delta(0)$ e il lemma rimane dimostrato. ■

Dal teorema delle Contrazioni deduciamo che $\forall x \in B_r(0)$ esiste un unico punto fisso $y := f(x) \in B_\delta(0)$ di

$$y = \Phi(x, y) \quad (8.18)$$

ossia una unica soluzione $y = f(x)$ di $F(x, y) = 0$. Poichè $F(0, 0) = 0$ deduciamo, per l'unicità del punto fisso, che $f(0) = 0$.

Inoltre, se $(x, y) \in B_r(0) \times B_\delta(0)$ è una soluzione di $F(x, y) = 0$, allora $y \in B_\delta(0)$ è un punto fisso di $\Phi(x, \cdot) : B_\delta(0) \rightarrow B_\delta(0)$ e, per l'unicità del punto fisso, $y = f(x)$.

Continuità di $f(x)$. Abbiamo, $\forall x_1, x_2 \in B_r(0)$,

$$\begin{aligned} \|f(x_1) - f(x_2)\| &\stackrel{(8.18)}{=} \|\Phi(x_1, f(x_1)) - \Phi(x_2, f(x_2))\| \\ &\leq \|\Phi(x_1, f(x_1)) - \Phi(x_1, f(x_2))\| \\ &\quad + \|\Phi(x_1, f(x_2)) - \Phi(x_2, f(x_2))\| \\ &\stackrel{(8.13)}{\leq} \frac{1}{2}\|f(x_1) - f(x_2)\| + \|\Phi(x_1, f(x_2)) - \Phi(x_2, f(x_2))\| \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|f(x_1) - f(x_2)\| &\leq \|\Phi(x_1, f(x_2)) - \Phi(x_2, f(x_2))\| \\ &\leq \|A^{-1}\| \|R(x_1, f(x_2)) - R(x_2, f(x_2))\| \\ &= \|A^{-1}\| \|F(x_1, f(x_2)) - F(x_2, f(x_2))\| \end{aligned} \quad (8.19)$$

ricordando la definizione di $R(x, y)$. Da (8.19) e dalla continuità di $F(x, y)$ segue che

$$x_1 \rightarrow x_2 \quad \Rightarrow \quad \|f(x_1) - f(x_2)\| \rightarrow 0$$

ossia la continuità di $f(x)$ nel generico punto x_2 . Il punto (i) del teorema è completamente dimostrato.

Per provare il punto (ii) del teorema dobbiamo provare la **derivabilità di $f(x)$ in $x \in \text{int}(B_r(0))$** . Più precisamente dobbiamo mostrare che, denotando

$$\Lambda := -[\partial_y F(x, y)]^{-1} \partial_x F(x, y) \in \mathcal{L}(X, Y)$$

con $y = f(x)$, si ha

$$\frac{\|f(x+h) - f(x) - \Lambda h\|}{\|h\|} \rightarrow 0 \quad \text{per} \quad \|h\| \rightarrow 0. \quad (8.20)$$

Prendiamo h piccolo in modo tale che $x+h \in B_r(0)$. Per la continuità di $f(\cdot)$ in x ,

$$k := f(x+h) - f(x) \rightarrow 0 \quad \text{per} \quad h \rightarrow 0.$$

Poichè F è differenziabile in $(x, y) := (x, f(x))$, $\forall \varepsilon > 0$ esiste $\eta > 0$ tale che $\forall \|h\| \leq \eta$ si ha

$$\|F(x+h, y+k) - F(x, y) - \partial_x F(x, y)h - \partial_y F(x, y)k\| \leq \varepsilon(\|h\| + \|k\|)$$

e, quindi, essendo $F(x+h, f(x)+k) = 0$, $F(x, f(x)) = 0$,

$$\|\partial_x F(x, y)h + \partial_y F(x, y)k\| \leq \varepsilon(\|h\| + \|k\|). \quad (8.21)$$

Poichè

$$\partial_y F(x, f(x)) \rightarrow \partial_y F(0, 0) \quad \text{per} \quad x \rightarrow 0,$$

essendo $\partial_y F(0, 0) \in GL(Y, Z)$, dal lemma 8.2.2, si ha che $\partial_y F(x, f(x))$ è invertibile e

$$\|[\partial_y F(x, f(x))]^{-1}\| \leq 2\|[\partial_y F(0, 0)]^{-1}\| = 2\|A^{-1}\| \quad (8.22)$$

per tutti $\|x\| \leq r$, prendendo eventualmente un r più piccolo di quanto fatto nel lemma 8.4.1.

Scrivendo

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) - \Lambda h &= k + [\partial_y F(x, y)]^{-1} \partial_x F(x, y) h \\ &= [\partial_y F(x, y)]^{-1} [\partial_y F(x, y)k + \partial_x F(x, y) h], \end{aligned}$$

da (8.21) e (8.22), abbiamo

$$\begin{aligned} \|f(x+h) - f(x) - \Lambda h\| &\leq \|\partial_y F(x, y)^{-1}\| \|\partial_y F(x, y)k + \partial_x F(x, y)h\| \\ &\leq 2\|A^{-1}\| \varepsilon(\|h\| + \|k\|) \\ &\leq 2\|A^{-1}\| \varepsilon(\|h\| + \|k - \Lambda h\| + \|\Lambda h\|) \end{aligned}$$

da cui, ricordando che $k := f(x+h) - f(x)$, e abbreviando $C := 2\|A^{-1}\|$,

$$\begin{aligned} (1 - C\varepsilon)\|f(x+h) - f(x) - \Lambda h\| &\leq C\varepsilon(\|h\| + \|\Lambda h\|) \\ &\leq C\varepsilon(1 + \|\Lambda\|)\|h\| \end{aligned}$$

Abbiamo provato che $\forall \varepsilon < 1/2C$, esiste $\eta > 0$ tale che $\forall \|h\| < \eta$,

$$\frac{\|f(x+h) - f(x) - \Lambda h\|}{\|h\|} \leq \varepsilon 2C(1 + \|\Lambda\|)$$

ossia, per la arbitrarietà di ε , la (8.20).

Proviamo l'ultimo punto (iii). Se $F \in C^2$, dalla identità

$$D_x f(x) = -[\partial_y F(x, f(x))]^{-1} \partial_x F(x, f(x))$$

deduciamo che $D_x f(x)$ è di classe C^1 (usando che la mappa $A \rightarrow A^{-1}$ definita in (8.7) è di classe C^∞). Quindi $f(x) \in C^2$. Se $F \in C^k$ allora, ragionando per induzione, si ottiene $f \in C^k$. ■

8.4.1 Il caso $F : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

Studiamo l'insieme di livello di una funzione $F \in C^1(\mathbf{R} \times \mathbf{R}, \mathbf{R})$ (ossia gli spazi $X, Y, Z = \mathbf{R}$). Se

$$F(x_0, y_0) = 0 \quad \text{e} \quad \nabla F(x_0, y_0) \neq 0 \tag{8.23}$$

allora l'insieme $F(x, y) = 0$ è localmente una curva semplice e regolare di classe C^1 , esprimibile come un grafico o nella variabile x o nella variabile y . Se vale (8.23) il punto (x_0, y_0) si dice regolare.

Se, infatti, ad esempio $\partial_y F(x_0, y_0) \neq 0$, l'insieme $F(x, y) = 0$ è rappresentabile, localmente vicino al punto (x_0, y_0) , come il grafico di una funzione $f : (x_0 - r, x_0 + r) \rightarrow \mathbf{R}$ di classe C^1 , con $f(x_0) = y_0$.

Un vettore tangente alla curva è

$$(1, f'(x_0)) = \left(1, -\frac{\partial_x F(x_0, y_0)}{\partial_y F(x_0, y_0)}\right).$$

Un vettore normale alla curva è

$$\nabla F(x_0, y_0) = \left(\partial_x F(x_0, y_0), \partial_y F(x_0, y_0) \right).$$

Il piano tangente ad $F(x, y) = 0$ in (x_0, y_0) è

$$(x - x_0) \partial_x F(x_0, y_0) + (y - y_0) \partial_y F(x_0, y_0) = 0.$$

ESERCIZIO Consideriamo la funzione $F : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ definita da

$$F(x, y) := e^{x-y} + x^2 - y^2 - e(x+1) + 1.$$

Provare che l'insieme $F(x, y) = 0$ è rappresentabile, localmente vicino al punto $(0, -1)$, come il grafico di una funzione $f : (-r, r) \rightarrow \mathbf{R}$ di classe C^∞ , con $f(0) = -1$ ed avente un minimo locale in $x = 0$.

SOLUZIONE Si ha $F(0, -1) = 0$ e

$$\partial_y F(x, y) = -e^{x-y} - 2y$$

per cui $\partial_y F(0, -1) = 2 - e \neq 0$. Essendo $F \in C^\infty$, dal teorema della funzione implicita esiste $f : (-r, r) \rightarrow \mathbf{R}$ di classe C^∞ con $f(0) = -1$, tale che

$$F(x, f(x)) = e^{x-f(x)} + x^2 - [f(x)]^2 - e(x+1) + 1 = 0.$$

Derivando questa relazione in x , otteniamo

$$e^{x-f(x)}(1 - f'(x)) + 2x - 2f(x)f'(x) - e = 0 \quad (8.24)$$

e pertanto, per $x = 0$,

$$e(1 - f'(0)) + 2f'(0) - e = 0$$

ossia $f'(0) = 0$. Derivando ulteriormente (8.24) troviamo

$$e^{x-f(x)}(1 - f'(x))^2 - e^{x-f(x)}f''(x) + 2 - 2[f'(x)]^2 - 2f(x)f''(x) = 0$$

che, calcolata in $x = 0$, da

$$e - ef''(0) + 2 + 2f''(0) = 0$$

da cui $f''(0) = (e + 2)/(e - 2) > 0$. La funzione $f(x)$ ha dunque un minimo locale in $x = 0$.

ESERCIZIO Consideriamo la funzione $F : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ definita da

$$F(x, y) := x^2y + e^{x+y}.$$

Provare che l'insieme $F(x, y) = 0$ è il grafico di una funzione $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$ di classe C^∞ . Disegnare la curva $F(x, y) = 0$.

SOLUZIONE Per ogni $x \neq 0$ la funzione

$$y \rightarrow F(x, y) = x^2 y + e^{x+y}$$

è strettamente monotona essendo

$$\partial_y F(x, y) = x^2 + e^{x+y} > 0 \quad (8.25)$$

e risulta

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} F(x, y) = \pm\infty.$$

Ne segue che, $\forall x \neq 0$, esiste un unico $y := f(x)$ tale che $F(x, y) = 0$.

Notiamo che $F(0, y) = e^y > 0$ e quindi non vi sono zeri di $F(x, y)$ sulla retta $x = 0$. Abbiamo definito una funzione

$$f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$$

il cui grafico coincide con gli zeri di $F(x, y) = 0$.

Poi, notando che $F(x, y) > 0$ nel semipiano $\{y \geq 0\}$ deduciamo che $f(x) < 0$, $\forall x \neq 0$.

Da (8.25), essendo $F \in C^\infty$, applicando il teorema della funzione implicita, $f(x)$ risulta una funzione di classe C^∞ .

Calcoliamo la derivata $f'(x)$. Differenziando l'identità

$$x^2 f(x) + e^{x+f(x)} = 0 \quad (8.26)$$

troviamo, con facili calcoli,

$$2xf(x) + e^{x+f(x)} + f'(x)(x^2 + e^{x+f(x)}) = 0$$

e, dalla identità (8.26),

$$x(2-x)f(x) + f'(x)(x^2 + e^{x+f(x)}) = 0$$

per cui

$$f'(x) = -\frac{x(2-x)f(x)}{x^2 + e^{x+f(x)}}.$$

Essendo $f(x) < 0$, $\forall x \neq 0$, si deduce che

$$f'(x) = \begin{cases} > 0 & \text{per } x \in (0, 2) \\ < 0 & \text{per } x < 0, x > 2. \end{cases}$$

La $f(x)$ è decrescente in $(-\infty, 0)$, $(2, +\infty)$ e crescente in $(0, 2)$. In $x = 2$ la funzione $f(x)$ ha un punto di massimo relativo.

Per monotonia esiste il limite

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \leq 0.$$

Proviamo che $l = 0$. Infatti, se fosse $l < 0$, dedurremmo

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 f(x) + e^{x+f(x)} = -\infty$$

che contraddice (8.26). Analogamente si può provare che

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

Farlo per esercizio. Si disegni il grafico di $f(x)$ ossia l'insieme $F(x, y) = 0$.

In un intorno di un punto (x_0, y_0) non-regolare (singolare) ossia dove

$$\nabla F(x_0, y_0) = 0$$

l'insieme $F(x, y) = 0$ può essere assai complicato (sarà determinato dallo sviluppo di Taylor di F agli ordini superiori).

ESEMPIO L'insieme di livello $F(x, y) = 0$ della funzione

$$F(x, y) = y^2 - x^2$$

è l'unione delle 2 bisettrici $y = \pm x$. In particolare un intorno del punto critico $(0, 0)$ non è una curva.

ESEMPIO L'insieme di livello $F(x, y) = 0$ della funzione

$$F(x, y) = y^2 + x^2$$

si riduce al solo punto $(0, 0)$.

Consideriamo la funzione $F : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ definita da

$$F(x, y) := e^{x-y} + x^2 - y^2 - e(x+1) + 1.$$

Provare che l'insieme $F(x, y) = 0$ è rappresentabile, localmente vicino al punto $(0, -1)$, come il grafico di una funzione $f : (-r, r) \rightarrow \mathbf{R}$ di classe C^∞ , con $f(0) = -1$ ed avente un minimo locale in $x = 0$.

ESERCIZIO Dire se l'equazione

$$F(x, y) = y^3 - x^2 = 0$$

definisce implicitamente una unica funzione $y = f(x)$ in un intorno di $x = 0$.

SOLUZIONE Il teorema della funzione implicita non si applica essendo $\nabla F(0, 0) = 0$, ma

$$y^3 - x^2 = 0 \iff y = (x^2)^{1/3},$$

ossia $F(x, y) = 0$ è il grafico della funzione $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) := (x^2)^{1/3}$.

ESERCIZIO Consideriamo un polinomio reale di grado n nella variabile x dipendente da un parametro μ

$$P(\mu, x) = a_0(\mu) + a_1(\mu)x + \dots + a_n(\mu)x^n, \quad a_n \neq 0$$

in modo C^1 , ossia $a_0, \dots, a_n \in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. Supponiamo che per ogni μ il polinomio $P(\mu, x) = 0$ abbia n radici reali e distinte

$$x_1(\mu) < x_2(\mu) < \dots < x_n(\mu).$$

Provare che x_1, x_2, \dots, x_n sono funzioni C^1 da \mathbf{R} in \mathbf{R} .

SUGGERIMENTO Consideriamo ad esempio $x_1(\mu)$. Sappiamo che $P(\mu, x_1(\mu)) = 0$. Per provare la regolarità basta applicare il teorema della funzione implicita. Per questo bisogna provare che $(\partial_x P)(\mu, x_1(\mu)) \neq 0$. Decomponendo il polinomio

$$P(\mu, x) = a_n(\mu)(x - x_1(\mu)) \dots (x - x_n(\mu))$$

se fosse $(\partial_x P)(\mu, x_1(\mu)) = 0$, quale contraddizione si trova?

(questo mostra che autovalori semplici di matrici dipendenti da parametri sono funzioni regolari dei parametri).

8.4.2 Il caso $F: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$

Studiamo l'insieme di livello di una funzione $F \in C^1(\mathbf{R}^3, \mathbf{R})$. Se

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad \text{e} \quad \nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq 0 \tag{8.27}$$

allora l'insieme $F(x, y, z) = 0$ è localmente una superficie semplice e regolare di classe C^1 , esprimibile come il grafico di una funzione di 2 variabili.

Se, infatti, ad esempio $\partial_z F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, l'insieme $F(x, y, z) = 0$ è rappresentabile, localmente vicino al punto (x_0, y_0, z_0) , come il grafico di una funzione $z := f(x, y)$ di classe C^1 , con $f(x_0, y_0) = z_0$.

Un vettore normale alla superficie è $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ e il piano tangente ad $F(x, y, z) = 0$ in (x_0, y_0, z_0) è

$$(x - x_0) \partial_x F(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0) \partial_y F(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0) \partial_z F(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

ESERCIZIO Consideriamo la funzione $F : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ definita da

$$F(x, y, z) := \sinh(z - 1) - e^x + e^y + xz - y.$$

Provare che l'insieme $F(x, y, z) = 0$ è rappresentabile, localmente vicino al punto $(0, 0, 1)$, come il grafico di una funzione $z(x, y)$ di classe C^∞ , con $z(0, 0) = 1$ ed avente un minimo locale in $x = 0$. Si calcoli lo sviluppo di Taylor di $z(x, y)$ in $(0, 0)$.

SOLUZIONE Si ha $F(0, 0, 1) = 0$ e $\partial_z F = \cosh(z - 1) + x$ che, calcolata in $(0, 0, 1)$, da

$$\partial_z F(0, 0, 1) = 1.$$

Dal teorema della funzione implicita esiste $z(x, y)$ come affermato. Differenziando

$$\sinh(z(x, y) - 1) - e^x + e^y + xz(x, y) - y = 0$$

in x e y si trova

$$\begin{cases} \cosh(z(x, y) - 1)\partial_x z - e^x + z(x, y) + x\partial_x z(x, y) = 0, \\ \cosh(z(x, y) - 1)\partial_y z + e^y + x\partial_y z(x, y) - 1 = 0 \end{cases} \quad (8.28)$$

e, calcolando in $(x, y) = (0, 0)$,

$$\partial_x z(0, 0) = 0, \quad \partial_y z(0, 0) = 0.$$

Il piano tangente ad $F(x, y, z) = 0$ è $\{z = 1\}$.

Derivando ulteriormente la prima equazione in (8.28) rispetto a x si trova

$$\sinh(z - 1)[\partial_x z]^2 + \cosh(z - 1)\partial_{xx} z - e^x + 2\partial_x z + x\partial_x z = 0$$

e, calcolando in $(x, y) = (0, 0)$,

$$\partial_{xx} z(0, 0) = 1.$$

Analogamente si trova

$$\partial_{yy} z(0, 0) = -1, \quad \partial_{xy} z(0, 0) = 0$$

e, pertanto, lo sviluppo di Taylor di $z(x, y)$ al secondo ordine in $(0, 0)$ è

$$z(x, y) = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + o(x^2 + y^2).$$

Il grafico di $z(x, y)$ è tipo una sella vicino a $(0, 0)$.

8.4.3 Il caso $F : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$

Studiamo l'insieme di livello di una funzione $F := (F_1, F_2) \in C^1(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^2)$, ossia l'insieme

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Se $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ e $\nabla F_1(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ l'insieme definito dalla prima equazione è localmente una superficie semplice e regolare di classe C^1 con vettore normale $\nabla F_1(x_0, y_0, z_0)$.

Analogamente, se $\nabla F_2(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ l'insieme definito dalla seconda equazione è localmente una superficie semplice e regolare di classe C^1 con vettore normale $\nabla F_2(x_0, y_0, z_0)$.

Se $\nabla F_1(x_0, y_0, z_0)$ e $\nabla F_2(x_0, y_0, z_0)$ sono indipendenti queste 2 superfici si intersecheranno trasversalmente lungo una curva semplice.

Verifichiamolo applicando il teorema della funzione implicita. Se $\nabla F_1(x_0, y_0, z_0)$ e $\nabla F_2(x_0, y_0, z_0)$ sono indipendenti, la matrice jacobiana 3×2 definita da

$$\left(\nabla F_1(x_0, y_0, z_0)^T, \nabla F_2(x_0, y_0, z_0)^T \right)$$

ha rango 2 e pertanto ha un minore 2×2 invertibile. Dal teorema della funzione implicita posso esplicitare 2 variabili in funzione dell'altra.

La retta tangente alla curva $F(x, y, z) = 0$ in (x_0, y_0, z_0) è l'intersezione dei 2 piani tangenti a $F_1 = 0$ e $F_2 = 0$, ossia

$$\begin{cases} (x - x_0) \partial_x F_1 + (y - y_0) \partial_y F_1 + (z - z_0) \partial_z F_1 = 0 \\ (x - x_0) \partial_x F_2 + (y - y_0) \partial_y F_2 + (z - z_0) \partial_z F_2 = 0. \end{cases}$$

ESERCIZIO Provare che il sistema

$$\begin{cases} F_1 = e^z + 3x - \cos y + y = 0 \\ F_2 = e^x - x - z + y - 1 = 0 \end{cases} \quad (8.29)$$

definisce una curva regolare in un intorno del punto $(0, 0, 0)$ esplicitabile parametricamente come $(x, y(x), z(x))$. Si scrivano le equazioni della retta tangente e del piano normale alla curva in $(0, 0, 0)$.

SOLUZIONE Si ha

$$\nabla F_1(0, 0, 0) = (3, 1, 1), \quad \nabla F_2(0, 0, 0) = (0, 1, -1).$$

Il minore della matrice Jacobiana

$$\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(y, z)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

invertibile. Quindi posso localmente esprimere l'insieme (8.29) come $(x, y(x), z(x))$.

DOMANDA Posso esprimere anche $(x, y)(z)$? E $(x, z)(y)$?

Un vettore tangente è $(1, y'(0), z'(0))$. Derivando in (8.29) trovo $y'(0) = -3/2$ e $z'(0) = -3/2$. Il piano normale è $2x - 3y - 3z = 0$

8.4.4 Il caso $F : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$, $n \geq m$

Studiamo l'insieme di livello di una funzione $F := (F_1, \dots, F_m) \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$, $n \geq m$ ossia l'insieme definito dal sistema di m equazioni

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ F_m(x_1, \dots, x_n) = 0. \end{cases} \quad (8.30)$$

Ragionando come al punto precedente, se $F(x) = 0$ ed

$$\nabla F_1(x), \dots, \nabla F_m(x)$$

sono indipendenti, ossia la matrice

$$(\nabla F_1(x), \dots, \nabla F_m(x))$$

ha rango m , allora il sistema (8.30) definisce m equazioni indipendenti, ossia può essere risolto esplicitando m variabili in funzione delle altre $n - m$ variabili.

ESERCIZIO (Un caso $F : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$) Sia $F : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^2$ definito da

$$F(x, y, z, v) = \begin{pmatrix} (y + 3)z - \tan(z + v) + 2x \\ \sin(z + v) + 3y - x(v + 3) \end{pmatrix}$$

Provare che il sistema $F = 0$ si può risolvere trovando $(z, v)(x, y)$.

8.5 Il teorema della mappa inversa

Definizione 8.5.1 Diciamo che una mappa $f : U \subset X \rightarrow Y$ è invertibile tra U e $V \subset Y$ se esiste una mappa $g : V \rightarrow U$ tale che

$$f(g(y)) = y, \quad \forall y \in V$$

$$g(f(x)) = x, \quad \forall x \in U.$$

La mappa $g := f^{-1} : V \rightarrow X$ si chiama applicazione inversa di f .

Definizione 8.5.2 Diciamo che una mappa $f : U \subset X \rightarrow Y$ è localmente invertibile in $x_0 \in U$ se esiste un intorno $U(x_0)$ e un intorno $V(y_0)$ dove $y_0 := f(x_0)$, tra cui f è invertibile.

Teorema 8.5.1 Sia $f : U \subset X \rightarrow Y$ una mappa di classe $C^1(U, Y)$. Sia $x_0 \in U$ tale che $Df(x_0) \in GL(X, Y)$. Allora

- f è localmente invertibile in x_0
- l' inversa $f^{-1} : V \rightarrow X$ è di classe C^1 , $f^{-1}(y_0) = x_0$ e $Df^{-1}(y_0) = [Df(x_0)]^{-1}$
- se $f \in C^k(U, Y)$, $k > 1$, allora $f^{-1} \in C^k(V, X)$.

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo la mappa $F : X \times Y \rightarrow Y$ definita da

$$F(x, y) = f(x) - y.$$

Abbiamo che $F(x_0, y_0) = 0$ ed $F \in C^1$ in un intorno di (x_0, y_0) . Si ha $\partial_x F(x_0, y_0) = Df(x_0) \in GL(X, Y)$.

Dal teorema della funzione implicita esiste $r, \delta > 0$ e una mappa

$$f^{-1} : B_\delta(y_0) \rightarrow X$$

di classe C^1 tale che tutte e sole le soluzioni $(x, y) \in B_r(x_0) \times B_\delta(y_0)$ di $F(x, y) = 0$ sono date da $x = f^{-1}(y)$ ■

ESERCIZIO Provare che $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ definita da

$$f(x, y) := (x^2 - y^2, 2xy)$$

è localmente invertibile per ogni $(x, y) \neq (0, 0)$. Provare che f non è globalmente invertibile.

SOLUZIONE Il determinante Jacobiano di $f(x, y)$ è

$$\det \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} = 4(x^2 + y^2) \neq 0$$

se $(x, y) \neq (0, 0)$. Per vedere che f non è globalmente invertibile osserva che, indicato $z = x + iy$, si ha $x^2 - y^2 = \operatorname{Re}(z^2)$ e $2xy = \operatorname{Im}(z^2)$. La mappa $z \rightarrow z^2$ è iniettiva?

ESERCIZIO Sia $A : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$ una mappa C^1 tale che $A(0) \in GL(\mathbf{R}^n)$. Provare che la mappa $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ definita da $f(x) = A(x)x$ è localmente invertibile.

8.6 Appendice

Diamo adesso solo un accenno alla portata di queste tecniche in spazi infinito dimensionali. La trattazione di questi argomenti fa parte della cosiddetta “analisi non-lineare” i cui scopi sono assai al di là di questo corso. Ma riteniamo utile inserirli per suscitare curiosità e far intuire l’ampiezza dei possibili sviluppi di questa materia.

Come primo esempio proviamo il seguente teorema.

Teorema 8.6.1 Differenziabilità rispetto ai dati iniziali *Consideriamo una equazione differenziale*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (8.31)$$

dove il campo vettoriale $f \in C^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$. Le soluzioni $x(t; x_0)$ dipendono in modo C^1 dai dati iniziali $x_0 \in \mathbf{R}^n$.

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo la mappa

$$F : C^1([t_0 - a, t_0 + a]) \times \mathbf{R}^n \rightarrow C^1([t_0 - a, t_0 + a])$$

(per un certo intervallo di tempo $[t_0 - a, t_0 + a]$ in cui la soluzione $x(t)$ di (8.31) esiste) definita da

$$F(\varphi, x_0)(t) := \varphi(t) - x_0 - \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau,$$

dove C^1 è uno spazio di Banach con la norma definita in (1.8), come provato al Capitolo 1. Essendo $F \in C^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ si vede che, se $\varphi(t) \in C^1$ allora $F(\varphi, x_0)(\cdot) \in C^1$, e la funzione F è ben definita.

Si ha $F(x(\cdot), x_0) = 0$ e la derivata risulta

$$\partial_\varphi F(\varphi, x_0)[h] := h(t) - \int_{t_0}^t (\partial_x f)(\tau, \varphi(\tau)) h(\tau) d\tau.$$

(dimostrarlo per esercizio) ed F è di classe C^1 (dimostrarlo per esercizio). Inoltre $\partial_\varphi F(\varphi, x_0)$ risulta invertibile con continuità. Infatti per ogni $g(t) \in C^1$ la equazione

$$h(t) - \int_{t_0}^t (\partial_x f)(\tau, \varphi(\tau)) h(\tau) d\tau = g(t)$$

ha una ed una sola soluzione equivalendo al sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{h}(t) - A(t) h(t) = \dot{g}(t), & A(t) := (\partial_x f)(t, \varphi(t)). \\ h(t_0) = g(t_0) \end{cases}$$

Si verifichi, usando ad esempio la formula esplicita della soluzione h ricavabile come in (5.6), che la mappa inversa $\partial_\varphi F(\varphi, x_0)^{-1}$ è continua. ■

ESERCIZIO Provare che se $f \in C^k$, $k > 1$, allora $x_0 \rightarrow x(t, x_0)$ è di classe C^k .

Come secondo esempio consideriamo l'equazione differenziale (di Duffing) che rappresenta un oscillatore forzato periodicamente nel tempo,

$$\ddot{x} + x + \varepsilon(x^3 + f(t)) = 0 \tag{8.32}$$

dove ε è un parametro ed $f(t)$ una funzione continua, periodica, di periodo

$$T \neq 2\pi n, \quad \forall n \in \mathbf{N} \tag{8.33}$$

(condizione di non risonanza).

Teorema 8.6.2 *Dimostriamo che, se vale (8.33), per ε sufficientemente piccolo esiste una ed una sola soluzione T -periodica di (8.32) di piccola ampiezza.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo la mappa $F : \mathbf{R} \times C_T^2 \rightarrow C_T^0$ dove

$$C_T^2 := \{x(t) = x(t + T), x \in C^2, \text{ con } \|x\|_{C^2} := \|x\|_\infty + \|\dot{x}\|_\infty + \|\ddot{x}\|_\infty\}$$

$$C_T^0 := \{x(t) = x(t + T) \text{ con norma } \|x\|_\infty\}$$

sono spazi di Banach (dimostrarlo per esercizio), definita da

$$F(\varepsilon, x) := \ddot{x} + x + \varepsilon(x^3 + f(t)).$$

La mappa $F \in C^1(\mathbf{R} \times C_T^2, C_T^0)$ (dimostrarlo per esercizio) ed

$$F(0, 0) = 0.$$

Per applicare il teorema della funzione implicita consideriamo la derivata

$$h \rightarrow (\partial_x F)(0, 0)[h] := \ddot{h} + h, \quad \forall h \in C_T^2.$$

Per la ipotesi (8.33) l'equazione

$$\ddot{h} + h = g(t)$$

ha una ed una sola soluzione $h \in C_T^2$ per ogni $g \in C_T^0$ (dimostrarlo per esercizio) e, così, si ha $(\partial_x F)(0, 0)^{-1} \in GL(C_T^0, C_T^2)$.

Dal teorema della funzione implicita, per ogni ε abbastanza piccolo, esiste una ed una sola soluzione T -periodica $x(t; \varepsilon)$ di (8.32) con $x(t; \varepsilon) \rightarrow 0$ per $\varepsilon \rightarrow 0$. ■

Chapter 9

Temî d'esame

Prova del 06-02-07

Esercizio 1) Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{t-x}{x^2+1} \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Provare che

- (i) ogni soluzione é definita per tutti i tempi $t \in \mathbf{R}$
- (ii) esistono $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t)$ e calcolarli
- (iii) Disegnare il grafico della soluzione.

Esercizio 2) Si consideri la funzione $F : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ definita da

$$F(x, y) := y^5 + y - xe^x.$$

Si dimostri che l'equazione

$$F(x, y) = 0$$

definisce implicitamente un'unica funzione $y = f(x)$, $f \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, tale che

$$F(x, f(x)) = 0.$$

Si verifichi inoltre che

- (i) $f(0) = 0$ ed $xf(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$
- (ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

- (iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^-$
- (iv) $x = -1$ è un punto di minimo per $f(x)$
- (v) Disegnare il grafico qualitativo della funzione $y = f(x)$.

Prova del 16-02-07

Esercizio 1) Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{t-x}{x^2+1} \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Provare che

- (i) la soluzione è definita per tutti i tempi $t \in \mathbf{R}$
- (ii) esistono $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t)$ e calcolarli
- (iii) Disegnare il grafico della soluzione.

Esercizio 2) Si consideri la funzione $F : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}$ definita da

$$F(x, y, u, z) = \ln(xy) + z(x - y) + u^2 + z^2 - 1.$$

Si dimostri che l'equazione

$$F(x, y, u, z) = 0 \tag{9.1}$$

definisce implicitamente, in un intorno del punto $p = (1, 1, 0, 1)$, un'unica funzione

$$z = f(x, y, u),$$

di classe C^∞ , tale che

$$F(x, y, u, f(x, y, u)) = 0.$$

- (i) Quanto vale $f(1, 1, 0)$?
- (ii) Si calcoli $\nabla f(1, 1, 0)$
- (iii) Si può risolvere l'equazione (9.1) trovando u in funzione di (x, y, z) in un intorno del punto p ?

Prova del 06-03-07**Esercizio 1)** Data la equazione differenziale

$$\dot{x} = \left(\frac{x^2 + 1}{t^4 + 1} \right)^{1/3}$$

si dimostri che tutte le soluzioni esistono in \mathbf{R} e che hanno due asintoti orizzontali, ossia, esistono finiti i $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t)$.

Esercizio 2) Provare che, in un intorno del punto $p = (0, 0, 1, 1)$ il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + zve^x = 2 \\ xe^z + ye^v - z + v = 0 \end{cases}$$

definisce una unica funzione $(z(x, y), v(x, y))$. Se ne calcoli la matrice Jacobiana.

Prova del 26-03-07**Esercizio 1)** Si studi il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + tx^2 \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

e si disegni il grafico qualitativo della soluzione.

Esercizio 2) Si consideri la funzione $F : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ definita da

$$F(x, y) = xe^y - y.$$

Si dimostri che l'equazione $F(x, y) = 0$ definisce implicitamente, in un intorno di $(0, 0)$, un'unica funzione $y = f(x)$ di classe C^∞ , tale che $F(x, f(x)) = 0$.

Si calcolino le derivate $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$ e si scriva lo sviluppo di Taylor del terzo ordine di $f(x)$ in $x = 0$.

Prova del 02-05-07**Esercizio 1)** Disegnare la soluzione di

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{xt}{t^2 + 1} \\ x(0) = a \end{cases}$$

al variare del parametro a .

Esercizio 2) Provare che il sistema

$$\begin{cases} e^z + 3x - \cos y + y = 0 \\ e^x - x - z + y - 1 = 0 \end{cases}$$

definisce una curva regolare in un intorno del punto $(0, 0, 0)$ esplicitabile come $(x, y(x), z(x))$. Si scriva la equazione della retta tangente alla curva in $(0, 0, 0)$.

Prova del 04-06-07

Esercizio 1) Si studi il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{t-x}{x^2+t^2+1} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

e si disegni il grafico qualitativo della soluzione.

Esercizio 2) Provare che il sistema

$$\begin{cases} x + y + z + u = 6 \\ x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 14 \\ x^3 + y^3 + z^3 + u^3 = 36 \end{cases}$$

definisce una curva regolare in un intorno di $x = 3$, un'unica funzione $(y(x), z(x), u(x))$, di classe C^∞ tale che $(y(3), z(3), u(3)) = (2, 1, 0)$. Si calcolino le derivate $(\partial_x y(x), \partial_x z(x), \partial_x u(x))$ in $x = 3$.

Prova del 04-07-07

Esercizio 1) Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{x} - t \\ x(1) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 2) Sia $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, continua, con $f(0) = 0$. Provare che il sistema

$$\begin{cases} y^2 - z^2 + \int_0^x f(t) dt = 0 \\ \log y - 2 \log z + x = 0 \end{cases}$$

definisce univocamente $y = y(x)$ e $z = z(x)$ in un intorno di $p = (0, 1, 1)$. Si scriva l'equazione della retta tangente e del piano normale in p alla curva definita implicitamente.

Prova del 24-09-07

Esercizio 1) Studiare qualitativamente la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{x^2 + t^2} \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 2) Provare che

$$e^{x-y} + x^2 - y^2 - e(x+1) + 1 = 0$$

definisce univocamente $y = y(x)$ in un intorno di $x = 0$ con $y(0) = -1$. Si provi che $x = 0$ é un punto di minimo relativo per $y(x)$.

Prova del 12-11-07

Esercizio 1) Si scriva esplicitamente e si disegni la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = \max\{|x|, |t|\} \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 2) Provare che l'equazione

$$z + e^{z-1} - (x^2 + y^2) = 0$$

definisce $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$ una sola funzione $z = z(x, y)$ avente un minimo assoluto in $(x, y) = (0, 0)$.