2.6 Paradosso di Zenone e la somma di infiniti addendi

Si potrebbe pensare che la matematica, la branca del sapere con la più solida tradizione di precisione e consistenza, sia la più immune dai paradossi. La sua storia ne è invece costellata, anche se ha spesso saputo rivolgere a suo favore le apparenti difficoltà create da contraddizioni vere o presunte. Il più antico paradosso matematico è la scoperta della incommensurabilità della diagonale e il lato del quadrato, la cui scoperta è attribuita a Pitagora. Ricordiamo poi quello di Zenone, il più famoso "Achille e la tartaruga", si tratta di uno dei più famosi paradossi dell'infinito potenziale, in cui Zenone di Elea (500 a.C.) sembra dimostrare l'impossibilità del moto.
Supponiamo inizialmente che Achille sia due volte più veloce della tartaruga e che entrambi gareggino lungo un percorso di un metro. Supponiamo inoltre che Achille dia mezzo metro di vantaggio alla tartaruga. Quando Achille avrà percorso mezzo metro, la tartaruga ne avrà percorso 1/4 di metro e quando Achille ne avrà percorso 1/4 la tartaruga ne avrà percorso 1/8 e così via all'infinito, cioè Achille non raggiungerà mai la tartaruga. Se osserviamo il percorso di Achille troviamo che esso è dato da infiniti tratti che costituiscono la successione:

1/2 ;
1 /2+1/4=3/4;

3/4+1/8=7/8;
7/8+1/16=15/16;

$(2^n - 1)/2^n$ **;**

ed è facile osservare che tale successione *tende ad* **1**. Vediamo così che una somma di quantità finite in un numero illimitato non è necessariamente finita. D'altro canto i tratti di strada percorsi da Achille, nel tentativo di raggiungere la tartaruga sono dati dalla successione

1/2;

1/4;

1/8;

$1/2^n$

ed anche questa successione tende a **1**.
Ma cosa significa l'espressione "tende a **1**"?
Se si indica con S_n la somma dei primi **n** tratti percorsi da Achille allora S_n, per quanto grande possa essere **n,** non supera mai **1**, numero al quale si avvicina sempre più**,** oppure possiamo dire qualunque posto più piccolo di 1 viene superato.
Sempre più, anzi quanto si vuole: la differenza tra 1 ed S_n, per **n** opportunamente grande, si fa più piccola di un qualsiasi numero per quanto piccolo da noi scelto. Grazie alla nozione di limite definita da Weierstrass è possibile ottenere la soluzione del paradosso, pur conservando un carattere infinito.
E' questa una proprietà caratteristica del Limite definito nell'Ottocento da Weierstrass.

Con la nozione matematica di limite si può dunque disporre della soluzione del paradosso, infatti, pur conservando l'idea di un processo e di una potenzialità illimitata, il limite ha il potere di risolvere tale potenzialità in una unità formale.

E' perciò possibile esprimere concretamente la soluzione finale di un processo illimitato senza rinunciare al carattere potenziale di quest'ultimo: l'inesauribilità di questo processo resta un fatto irrinunciabile, ma non per questo dobbiamo accontentarci di soluzioni approssimate. Il valore **1** è un limite che "comprende"tutta la successione $\left(2^n-1\right)/2^n$**,** è una soluzione della potenzialità di sviluppo di tale successione, pur mantenendosi sempre al di fuori di questa.

Cerchiamo ora di generalizzare quanto detto, supponiamo che Achille, nel tentativo di raggiungere la tartaruga, percorra ogni volta 1/3 del tratto restante. In questo caso troviamo che il percorso di Achille è dato da infiniti tratti che costituiscono la successione:

1/3;

1/3+2/9=5/9;

5/9+4/27=19/27;

1/3+2/9+ …. $+\left(\frac{2}{3}\right)^n$

In questo caso i tratti di strada percorsi da Achille, nel tentativo di raggiungere la tartaruga sono dati dalla seguente successione:

1/3;

2/9;

4/27;

… ;

$2/3^n$

La serie associata alla successione è: $\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$,e quest'ultima converge ad 1.

Abbiamo così dimostrato intuitivamente che la serie converge ad 1, ora invece dimostriamolo dal punto di vista formale, mediante il principio di induzione:

Poniamo $S_n = 1-\left(\frac{2}{3}\right)^n$, dove con S_n indichiamo la somma dei primi n tratti percorsi da Achille nel tentativo di raggiungere la tartaruga. Supposto vero l'asserto per n dimostriamolo per n+1, vale a dire dimostriamo che è vera $S_{n+1} = \frac{1}{3}+\frac{2}{3}S_n$.

Per n=1, base dell'induzione, l'asserto è vero, infatti quando n=1 si ha $1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}=S_1$

$$S_{n+1} = \frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}.$$

Abbiamo così provato anche formalmente che, se Achille fa solo 1/3 del restante raggiunge la tartaruga.

Possiamo generalizzare quanto detto affermando che: se Achille compie sempre un tratto r del restante, con $0 < r < 1$ Achille raggiungerà sempre la tartaruga. Infatti:

$$S_{n+1} = S_n + (1-S_n)r = S_n + r - rS_n = r + (1-r)S_n$$
$$S_n = 1-(1-r)^n$$

S_n tenderà ad 1 se e solo se $(1-r)^n$ tende ad 1e questo se e solo se $1-r<1$ da cui $r>0$.

Vediamo ora cosa accade se Achille percorre non 1/3 del rimanente, ma 1/3 del precedente. In questo caso troviamo che il percorso di Achille è dato da infiniti tratti che costituiscono la successione:

1/3;

1/3+1/9=4/9;

1/3+1/9+4/27=16/27;

1/3+1/9+4/27+ $\ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^n$;

e i tratti di strada percorsi da Achille nel tentativo di raggiungere la tartaruga costituiscono la seguente successione:

1/3;

1/9;

16/81;

$\left(\frac{2}{3}\right)^n$;

La serie associata alla successione è: 1/3+1/9+4/27+$\sum_{n=4}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$,in questo caso si verifica che la serie non converge ad 1, di conseguenza Achille non raggiungerà la tartaruga.

La soluzione del paradosso consiste nel fatto che benché il numero di lassi di tempo in cui Achille raggiunge la tartaruga sia infinito , in accordo con quanto argomenta Zenone , la durata di ciascun lasso diminuisce rispetto a quella del lasso precedente.

La valenza didattica dei paradossi sta nel fatto che, ad esempio da quello di Zenone nasce spontaneo il concetto di limite e quello di serie.

Ora cerchiamo di analizzare più da vicino l'argomento successione e serie, la cui distinzione è più di forma che di sostanza.

Una successione reale è una funzione definita da N, eventualmente privata di un numero finito di elementi, a R. Solitamente si indica una successione con la "lista" dei suoi valori $(a_n)_{n\in N}$ e a_n si chiama termine della successione. Per comodità le successioni saranno definite su N$\setminus\{0\}$.

Data una successione $(a_n)_{n\geq 1}$, possiamo formare un'altra successione che indicheremo solitamente con $(s_n)_{n\geq 1}$, delle somme parziali o delle ridotte, dove:

$s_1 = a_1$ $\qquad\qquad$ $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + ... + a_n$

Il termine s_n, in cui sommiamo i primi n termini della successione $(a_n)_{n\in N}$ si chiama ridotta di ordine n.

Sia data una successione reale $(a_n)_{n\geq 1}$, una serie è una somma formale

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

Si dice che questa serie è convergente e ha per somma b con b$\in$R se la successione delle somme ridotte converge a b. Se la successione delle ridotte diverge, anche la serie diverge. (Se la successione delle ridotte non ammette limite, la serie non ammetterà limite si definisce indeterminata.)

Dato x$\in$R, possiamo considerare la serie geometrica di ragione x :

$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1}$, dove se x = 0, poniamo $0^0 = 1$

E' facile notare che, nel caso x = 1 la successione delle ridotte è s_n= n, pertanto divergente.

Quindi la serie geometrica di ragione uno diverge a $+\infty$.

Se invece x$\neq$1, allora si ha:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} x^n = \frac{1-x^n}{1-x}$$

Quindi, se $|x|<1$ si ha che il $\lim_{n\to+\infty} x^n = 0$, otteniamo che la serie geometrica di ragione x, con $|x|<1$ è convergente e ha per somma $\frac{1}{1-x}$. Se x > 1 $\lim_{n\to+\infty} x^n = +\infty$, la serie geometrica di ragione x, con x > 1, è positivamente divergente. Se invece x$\leq$-1, la serie è indeterminata.

2.7 I numeri irrazionali

Nel paragrafo 1 abbiamo parlato di grandezze incommensurabili, la cui scoperta fu dovuta a Pitagora. Uno dei dogmi del pitagorismo era stata la concezione secondo cui l'essenza di tutte le cose, sia in geometria, sia nelle questioni pratiche e teoriche della vita umana era spiegabile in termini di *arithoms*, cioè di proprietà intrinseche dei numeri interi e dei loro rapporti. Essi credevano che i corpi fossero costituiti di corpuscoli tutti uguali tra loro e disposti in forme geometriche. Questa convinzione in ambito geometrico portava a ritenere che anche i punti avessero un'estensione (sia pur piccolissima). Da ciò essi deducevano che un segmento dovesse essere formato da un *numero finito di punti*. Pertanto il rapporto di due segmenti doveva risultare uguale al rapporto di numeri interi che esprimevano quante volte il punto era contenuto in ciascuno dei due segmenti. In altre parole essi pensavano che il punto fosse il *sottomultiplo comune* a tutti i segmenti; cioè che tutti i segmenti fossero tra loro *commensurabili*. Due grandezze omogenee si definiscono commensurabili quando ammettono una grandezza omogenea alle prime due che è contenuta un numero di volte in ciascuna di esse.

Applicando il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo isoscele essi furono però costretti ad ammettere l'esistenza di grandezze *incommensurabili*: scoprirono infatti l'incommensurabilità della diagonale del quadrato rispetto ad un suo lato. Fu proprio attraverso la geometria che per la prima volta si pensò ai numeri irrazionali. Se il lato di un quadrato ha la lunghezza di 1cm, la lunghezza della diagonale sarà la radice quadrata di 2cm. Ma, come avevano già scoperto gli antichi, non esiste alcuna radice il cui quadrato sia 2. La dimostrazione dell'esistenza di grandezze incommensurabili è straordinariamente semplice. Supponiamo per assurdo che esista una frazione m/n, con m/n ridotta ai minimi termini, che sia la radice quadrata di due, di modo che $m^2/n^2=2$ cioè $m^2=2n$. Allora m^2 è un numero pari, e quindi m deve essere un numero pari, perché il quadrato di un numero dispari è dispari. Ma se m è pari, m^2 può essere diviso per 4 perché se $m=2p$ allora $m^2=4p^2$. Dovremo pertanto avere $4p^2=2n^2$ in cui p è la metà di m. Quindi $2p^2=n^2$ ed anche n/p sarà la radice quadrata di 2. Ma siamo pervenuti ad un assurdo perché m/n era ridotta ai minimi termini ed invece abbiamo trovato che sia m che n sono divisibili per due, allora non esiste alcun frazione il cui quadrato sia pari a 2.

Ma se m e n sono incommensurabili, cosa succede se si tenta di determinare il rapporto m/n?

Riportando sulla diagonale prima m, poi 1/10 m, 1/100 m, … si ha:

m<n; 1,4 m<n; 1,41 m<n; …

e così via fino all'infinito; cioè il rapporto tra grandezze incommensurabili è espresso mediante un numero decimale illimitato aperiodico (se fosse periodico sarebbe riducibile a frazione) che viene chiamato numero irrazionale.

L'esistenza di grandezze incommensurabili e conseguentemente dei numeri irrazionali contraddiceva non solo le convinzioni filosofiche dei pitagorici, ma metteva anche in crisi il concetto di infinito della filosofia greca.

Abbiamo trovato parlando di grandezze incommensurabili che non esiste alcun numero razionale il cui quadrato sia 2, allora di conseguenza possiamo affermare che $\sqrt{2}$ non è un numero razionale. Infatti se calcoliamo, utilizzando una calcolatrice, $\sqrt{2}$ viene fuori

1,41421356237309504880168872………………………

Risulta evidente che si tratta di un numero decimale illimitato in cui non è evidente alcuna periodicità, quindi si può congetturare che $\sqrt{2}$ non è un numero razionale.

Dimostriamo la nostra congettura:

Supponiamo che $\sqrt{2}$ sia un numero razionale e quindi è possibile esprimerlo come una frazione *p/q* ridotta ai minimi termini, cioè tale che il *MCD(p,q)=1*; allora si ha:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$$

cioè $p^2 / q^2 = 2$

da cui segue $p^2 = 2q^2$

Quindi p^2 è divisibile per 2, ed è un numero pari, ma allora anche *p* è pari perché il quadrato di un numero pari è pari, inoltre lo si può scrivere *p=2k* ed allora $p^2 = 4k^2$.

Da $p^2 = 2q^2$ si ha $2q^2 = 4k^2$

Si deduce che q^2 è il doppio di k^2 (formalmente $q^2 = 2k^2$). Ciò dimostra che q^2 è pari quindi anche *q* è pari. Abbiamo quindi dimostrato che sia p che q sono pari, ma questo contraddice l'ipotesi che MCD(p,q)=1. Assumendo che √2 è razionale abbiamo ottenuto un assurdo. Quindi √2 non è un numero razionale.

Importante significato geometrico di √2

Si può evidenziare, applicando il teorema di Pitagora, che la diagonale di un quadrato di lato 1 è esattamente √2.

L'irrazionalità di √2 dimostra che il rapporto diagonale/lato nel quadrato non è razionale. Ciò significa che anche le figure geometriche più semplici non possono essere costruite "attaccando" copie di segmenti di "lunghezza elementare minima". Si pensa che questa scoperta del quinto secolo avanti Cristo abbia provocato una delle prime crisi dei fondamenti della matematica. E' possibile approssimare √2 mediante metodi iterativi,tali metodi permettono di approssimare le soluzioni di un'equazione in un dato intervallo [a, b]; a partire da una approssimazione iniziale x_i generano una successione x_n che converge alla soluzione x. I metodi iterativi richiedono un algoritmo per cercare gli intervalli nei quali si trova un sola soluzione;

questa operazione è detta di separazione delle radici. Un metodo è quello della ricerca del cambiamento di segno: calcolata la funzione in un dato intervallo [a, b] cominciando da *a* e con un passo *h* si percorre tutto l'intervallo calcolando per ogni *x* il corrispondente *y* = *f(x)*; quando si verifica un cambiamento di segno della y, si può concludere che c'è almeno uno zero in [x - h, x], alla condizione che la funzione sia continua nell'intervallo (questo risultato si basa sul teorema di **Bolzano**).

I metodi iterativi sono basati su:

- una formula iterativa per generare la *n*-esima iterazione x_n a partire dalle iterazioni già calcolate;
- un criterio per la scelta dell'approssimazione iniziale;
- un criterio di arresto che consenta di decidere quando interrompere il processo iterativo.

Ricordiamo come metodi iterativi : quello di Newton e Bisezione.

Il metodo di bisezione è un metodo che genera una successione di intervalli [ai,bi] tali che [ai,bi] $\supseteq$[ai+1,bi+1]. Almeno una delle due successioni ai, bi converge ad una radice della funzione.

Per la convergenza è sufficiente la "localizzazione" (separazione) delle radici. La velocità di convergenza, generalmente lenta è compensata dal fatto che essi convergono in ipotesi estremamente poco restrittive (per il metodo di bisezione è sufficiente la continuità della funzione).

Il metodo di Newton invece data una successione di punti x_i tali che, se l'approssimazione iniziale appartiene al *dominio di attrazione* di una radice *c*, converge a *c*.

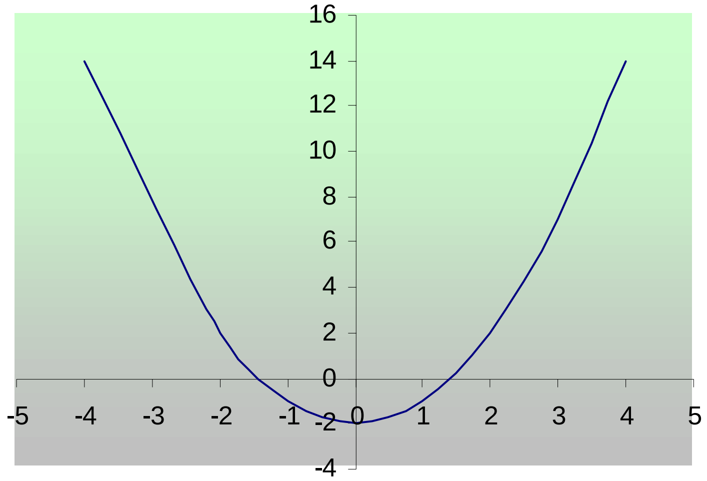
Il dominio di attrazione è un intorno della radice tale che, se scelgo come punto iniziale un punto interno all'intorno, il metodo è convergente.

Tale metodo converge in genere più velocemente del metodo di bisezione anche se richiede ipotesi più restrittive (per il **metodo di Newton** la funzione deve essere derivabile).

I metodi iterativi possono essere costruiti a partire da "modelli" della funzione, ossia si approssima la funzione *f(x)* con una opportuna funzione *g(x)* e si approssima lo zero di *f(x)* con lo zero di *g(x)*. I modelli più utilizzati sono quelli lineari.

Vediamo ora l'applicazione di uno dei metodi iterativi: "il metodo di Bisezione".

Considerata la funzione $x^2 - 2 = 0$



si vede che il primo cambiamento di segno lo si ha tra [1, 2], quindi in tale intervallo vi sarà uno dei due zeri.

Adesso si calcola il punto medio tra 1 e 2

(1+2)/2 = 3/2 = 1.5

A questo valore di *x* corrisponde sulla parabola il valore di *y*:

$$y = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 = \frac{9}{4} - 2 = \frac{1}{4} = 0.25$$

0,25 è positivo dunque il cambiamento di segno avviene tra 1 e 1,5 e in questo intervallo vi è la soluzione.

Secondo passo:

calcoliamo la media tra 1 e 1.5

(1+1.5)/2 = 1.25 = 5/4=1.25

e quindi il corrispondente valore di y

$$y = \left(\frac{5}{4}\right)^2 - 2 = \frac{25}{10} - 2 = -\frac{7}{16} = 0.4375$$

Il valore è ora negativo, quindi la soluzione cade tra 1.25 e 1.5.

Iterando il procedimento ci si avvicina sempre di più alla soluzione

Si noti che con tale metodo si approssima la funzione *f(x)* con

l(x)=-1+2(x-a)/(b-a)

dove *a* e *b* sono rispettivamente l'estremo inferiore e superiore dell'intervallo considerato.

L'errore che si commette al passo *k* è

ek = (bk - ak).

Mentre per quanto riguarda l'applicazione del metodo di Newton, considerata ancora la funzione $x^2 - 2 = 0$ e procedendo, come prima alla separazione delle radici, il cambiamento di segno è tra *a*=1 e *b*=2, dunque in tale intervallo vi sarà uno dei due zeri della funzione.

Sia $P_0(1;-1)$ calcoliamo in tale punto $f(1)$ e $f'(1)$.

Tracciamo da questo punto la tangente alla curva, tale tangente incontrerà l'asse delle ascisse per un valore di x che è la seconda approssimazione della soluzione cercata.

La tangente avrà per coefficiente angolare il valore della derivata in P0,. Utilizzando l'equazione della retta generica per P_0:

$y - y_0 = m(x - x_0)$ sostituendo m con $f^{'}(x_0)$ e imponendo y = 0 si ha:

$$-y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

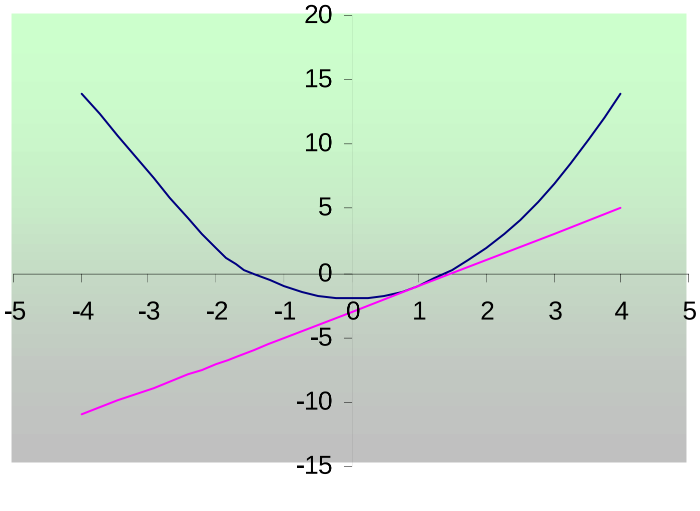
$$\Downarrow$$

$$x = x_0 - \frac{y_0}{f'(x_0)} = 1 - \frac{-1}{f'(1)} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

A questo valore di *x* corrisponde sulla parabola il valore di *y*:

$$y = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 = \frac{9}{4} - 2 = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

Graficamente si avrà:



Il nuovo punto della parabola da cui tracciare la tangente sarà allora (0,5; 0,25) e iterando una seconda volta la formula:

$$x = x_1 - \frac{y_1}{f'(x_1)} = 1{,}5 - \frac{0{,}25}{f'(1{,}5)} = 1{,}5 - \frac{0{,}25}{3} = 1{,}417$$

Alla seconda iterazione abbiamo già un risultato con tre cifre esatte!

2.8 Area del cerchio

L'area del cerchio si ottiene moltiplicando il quadrato del raggio per 3,14

$A = \pi * r^2$

La lunghezza della circonferenza di un cerchio la si ottiene moltiplicando il diametro per 3,14.

Ma ci si chiede chi è quel simbolo magico ed insidioso che consente di determinare l'area del cerchio?

Come gli uomini sono riusciti ad individuarlo e a definirlo?

Il simbolo π viene usato per denotare il valore costante di questo rapporto:

dal XVIII sec $\Leftarrow$ $\pi = \dfrac{C}{d}$

$$\Downarrow$$

dopo il 1550

solo a partire dal XVIII sec d.C. , mentre il simbolo di uguaglianza entrò nell'uso corrente dalla seconda metà del 1500.

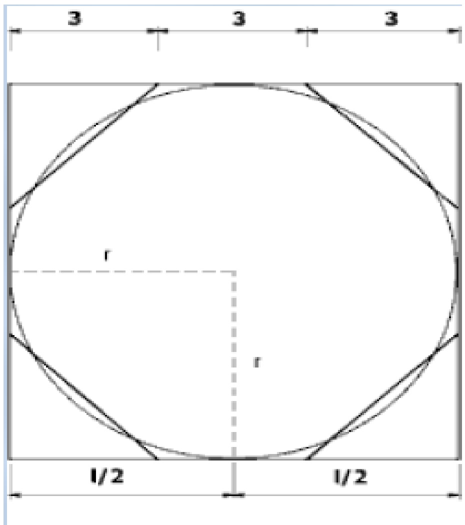
Dai documenti e dai reperti storici arrivati fino a noi, risulta evidente che nel 300 a. C. il significato di π era già noto presso Egiziani e Babilonesi, i quali furono i primi ad avventurarsi nel calcolo del valore di π. Ahmes scribe, inventa un sistema per calcolare l'area del cerchio e, trova una regola generale per ricavare π. Sul papiro lo scribe Ahmes lasciò scritto:

Togli $\frac{1}{9}$ ad un diametro e costruisci un quadrato sulla parte che rimane, questo quadrato ha la stessa area del cerchio.

$$\pi = 4 * \left(\frac{8}{9}\right)^2 = 3.16049\ldots$$

Le indicazioni lasciate sul papiro Rhind da Ahmes, si possono considerare come il primo tentativo di "quadrare il cerchio". Il problema della quadratura del cerchio è interamente connesso con π.

Trisezionando i lati di un quadrato con lato di 9 unità e tagliando via i quattro triangoli isosceli, si costruisce un ottagono, la cui area, osserva Ahmes, non appare molto diversa da quella del cerchio iscritto nel quadrato.



Se, dunque, riusciremo a conoscere l’area dell’ottagono, avremo, all’incirca, anche l’area del cerchio. L’area dell’ottagono è facile da ricavare: “noi egiziani, affermava Ahmes, sappiamo da tempo calcolare le aree di quadrati e triangoli; e non fatichiamo a vedere che

$$Area_{ottagono} = Area_{quadrato} - 4Area_{triangolo}$$

$$Area_{ottagono} = 81 - 18 = 63$$

Questo 63 non mi dice molto, ma 64 lo conosco bene, è l’area di un quadrato di lato uguale a otto unità. E questa è per me l’area del cerchio inscritto nel quadrato di lato 9. Ahmes continua : “i posteri torceranno forse il naso di fronte alle approssimazioni del mio procedimento”; ma io in tanto sono in grado di compiere un passo ulteriore, e ricavarmi, da questo caso particolare, la regola generale che mi consentirà, dato un cerchio qualsiasi, di calcolarne l’area.

Devo soltanto scoprire che cos’è che ha trasformato l’area di un cerchio iscritto nel quadrato di lato 9, u la costante che cerco, d il diametro del cerchio, mi accorgo subito che

$A = u * d^2 = 8^2$

$u = 8^2 / 9^2 = 0,789$

Se poi, invece che ragionare sul diametro, che può essere talvolta scomodo, preferisco operare col raggio, chiamerò e poniamo p la costante che cerco e avrò:

$A = p * r^2 = 8^2$

$p = 8^2 / (9/2)^2$

$p = 4 * (8/9)^2 = 3.16049 \ldots$

ottenendo così un valore per la costante che sto cercando".
Il primo che tentò di calcolare scientificamente il valore di π fu Archimede, per questo motivo viene definito numero di Archimede proprio perché egli formulò una procedura geometrica per il suo calcolo approssimato, e riuscì a dimostrare che π è compreso tra:

$$3+\frac{10}{71} \text{ e } 3+\frac{10}{70}$$

vale a dire a:

3,1408 e 3,1429

approssimando la lunghezza della circonferenza con il perimetro dei poligoni regolari inscritti e circoscritti. Infatti poiché il perimetro di un poligono regolare inscritto in una circonferenza è sempre minore della lunghezza della circonferenza e questa ultima è sempre minore del perimetro di un poligono circoscritto, consegue che, detti p e P rispettivamente i perimetri inscritti e circoscritti ed indicata con C la lunghezza della circonferenza, sussiste la seguente disuguaglianza:

$p < C > P$

Ora, si ha che dalla formula della lunghezza della circonferenza : $C = 2 * \pi * r$, si ha che, $\pi = C/2r$, per cui sostituendo in tale relazione al posto di C i perimetri p e P, si ha:

$$\pi_1 = \frac{p}{2r} e \pi_2 = \frac{P}{2r}$$

Ed in virtù della disuguaglianza precedente consegue che:

$$\pi_1 < \pi < \pi_2$$

Pertanto, π_1 è un approssimazione per difetto di pi-greco, mentre π_2 è un'approssimazione per eccesso; l'approssimazione risulterà tanto migliore quanto più grande sarà il numero dei lati del poligono inscritto e circoscritto.

Nel caso di poligoni inscritti,abbiamo considerato la formula $\pi_1 = p \big/ 2r$;

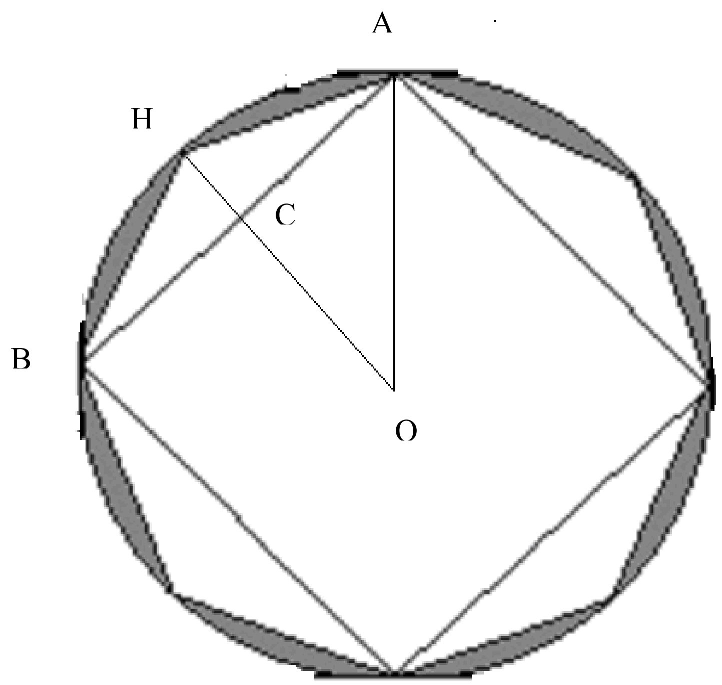
il problema consiste nel ricavare il lato del poligono inscritto in funzione del raggio della circonferenza data.

Tuttavia sfruttando il seguente teorema che afferma : se l_n indica il lato del poligono regolare di n lati (n=3,4,5,…), inscritto in una circonferenza di raggio unitario (per semplicità), il lato del poligono inscritto di 2_n lati è dato da:

$l_{2n} = \sqrt{2-\sqrt{4-l_n^2}}$,

possiamo aggirare l'ostacolo.

Infatti considerata la seguente figura, si ha che:



$2_r = 2$

$OA = OH = 1$

$AC = AB/2 = l_n/2$

per cui, applicando il teorema di Pitagora al triangolo AHC consegue che:

$$l_{2n} = AH = \sqrt{AC^2 + HC^2}$$

ma OC, applicando il teorema di Pitagora al triangolo OCA, è dato da:

$$OC = \sqrt{OA^2 - AC^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4} l_n^2} \text{ da cui } HC = 1 - OC = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{4} l_n^2}.$$

Per cui si ha:

$$l_{2n} = \sqrt{\frac{1}{4} l_n^2 + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{4} l_n^2}\right)^2} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - l_n^2}}$$

c.v.d.

Il teorema appena dimostrato mi consente di determinare, noto il lato di un qualsiasi poligono inscritto, il lato di tutti i poligoni inscritti il cui numero dei lati è multiplo del numero di lati del poligono inizialmente considerato. Se ora indichiamo con p_n il perimetro di n lati , dalla relazione $\pi_1 = p / 2_r$, segue che:

$$\pi_{1,n} = \frac{p_n}{2_r} = \frac{n l_n}{2}.$$

Analogamente si opera per l'approssimazione per eccesso di π; sfruttando il seguente teorema:sia l_n il lato di un poligono di n lati inscritto in una circonferenza, il lato

L_n del poligono di uguale numero di lati circoscritto è dato da:

$$L_n = \frac{2l_n}{\sqrt{4 - l_n^2}}$$

ricaviamo che

$$\pi_{2,n} = \frac{P_n}{2r} = \frac{nL_n}{2r}.$$

In virtù della relazione ottenuta e considerando il raggio della circonferenza uguale ad 1, si ha:

$$\pi_{2'n} = \frac{nl_n}{\sqrt{4 - l_n^2}}.$$

Per cui la relazione $\pi < \pi < \pi_2$ assume la forma :

$$\frac{nl_n}{2} < \pi < \frac{nl_n}{\sqrt{4 - l_n^2}}$$

Essendo l_n il lato del poligono di n lati inscritto nella circonferenza.

Il più grande matematico indiano del VII sec Brahmagupta calcolò i perimetri dei poligoni inscritti alla circonferenza aventi 12,24,49,96 lati ottenendo i valori:

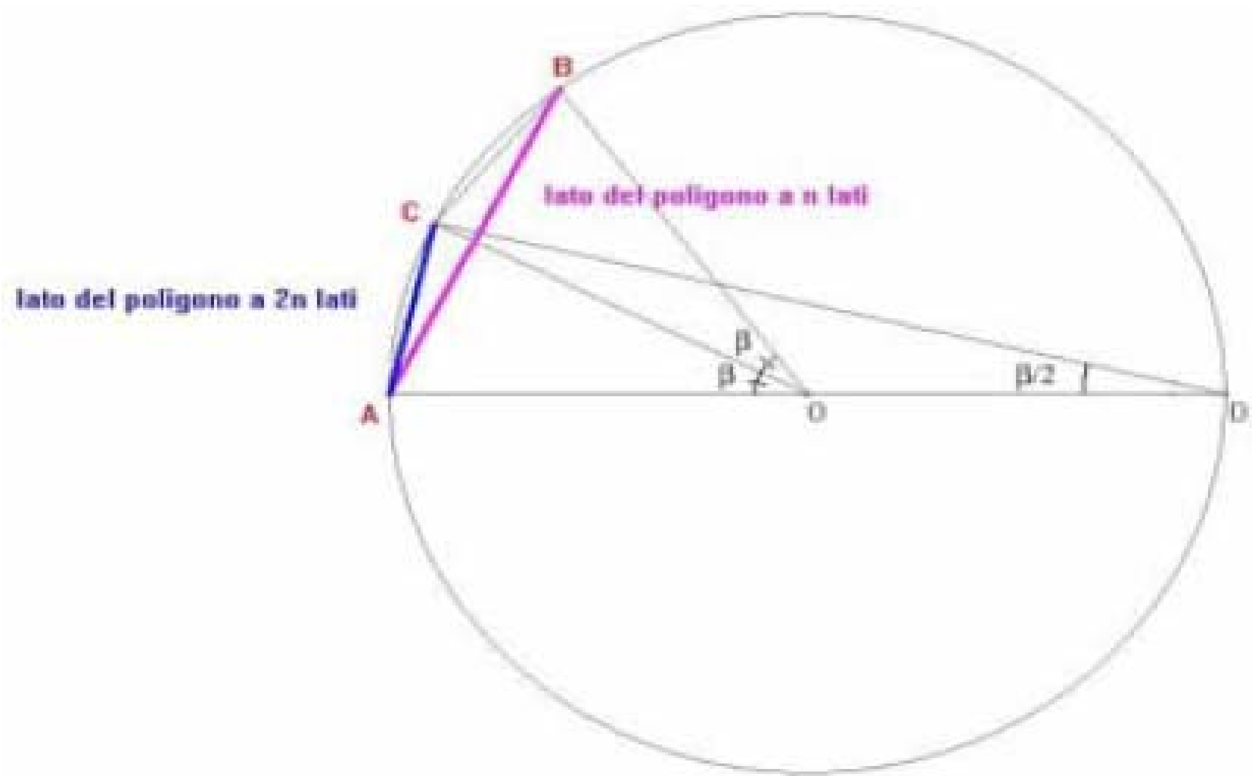
$\sqrt{9{,}65}$; $\sqrt{9{,}81}$; $\sqrt{9{,}86}$; $\sqrt{9{,}87}$

Poi vide che aumentando i numeri dei lati e di conseguenza identificando sempre più i poligoni alla circonferenza i loro perimetri, e quindi π si sarebbero sempre più avvicinati a $\sqrt{10}$.

Era, ovviamente, del tutto in errore ma questo fu il valore che poi si diffuse dall'India all'Europa e che fu usato nel Medioevo dai matematici di tutto il mondo, forse anche per l'estrema facilità con cui si poteva ricordare e trasmettere

$\pi = \sqrt{10}$

Francois Viète (1540-1603) metteva in relazione l'area di un poligono regolare inscritto a n lati con quella di un poligono di $2n$ lati.



Viète utilizzando la trigonometria, formulò la seguente approssimazione:

$$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}*\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}*\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}*...$$

Il reciproco del valore ottenuto, moltiplicato per 2, fornisce un valore sempre più approssimato di π, quanto maggiore è il numero di termini.

I primi quattro termini forniscono il valore approssimato 3,140331 con le prime due cifre decimali esatte. Con sei termini si ha: 3,141513, le cui prime quattro cifre decimali sono esatte. Occorrono dieci termini per avere sei cifre decimali esatte:

3,141592…

Nel 1655 John Wallis esprime π mediante un prodotto infinito, in cui tutti i fattori sono numeri naturali.

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2*2*4*4*6*6*}{1*1*3*3*5*5*}$$

Essa consente un lento avvicinamento al suo valore limite in una continua oscillazione tra un termine maggiore di π e il successivo minore di π.

La formula di Wallis richiede almeno 1000 termini per avere le prime due cifre decimali esatte di π.

Successivamente Leibniz nel 1682, arriva a definire π come il quadruplo della somma a segni alternati dei reciproci nella successione dei numeri dispari.

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+...$$

Occorrono ben 764 termini per calcolare π anche solo con la precisione ottenuta da Archimede.

Nel 1736 Eulero comincia ad utilizzare il simbolo π per denotare il rapporto tra la circonferenza e il suo diametro.

Dopo migliaia di anni spesi nell'affannosa corsa alla determinazione dei decimali di π, con la speranza di trovate una formula, ci si pose la domanda: quale era la vera natura di π? Quale era la natura di quel numero le cui cifre decimali sembravano sfuggire a qualsiasi regolarità?

Adrien-Legendre affermava che il numero π non sia neppure contenuto nelle irrazionalità algebriche, ossia che non possa essere una radice di un equazione algebrica con un numero finito di termini, i cui coefficienti siano irrazionali. Pare però molto difficile dimostrarlo in modo rigoroso.

Nel 1882 Ferdinando von Lindemann definiva π un numero trascendente e sfruttando la famosa equazione di Eulero dimostrò che: la quadratura del cerchio è impossibile.

Le cifre decimali di π si susseguono all'infinito. Trentanove cifre di π sono sufficienti per calcolare la circonferenza di un cerchio.

Perché matematici ed esperti di calcolatori non si accontentano delle prime 50 cifre decimali di π?

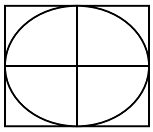
Probabilmente il calcolo di π è diventato una sorta di parametro per l'elaborazione: serve come misura di raffinatezza e dell'affidabilità di calcolatori che lo effettuano.

Il giorno ufficiale di π è il 14 marzo, dalla scrittura anglosassone 3/14; viene generalmente celebrato alla 1:59 pm (3,14159) con feste nei dipartimenti di matematica in varie istituzioni del mondo.

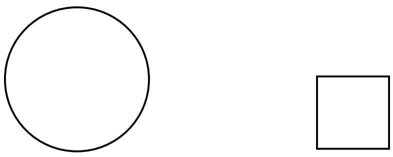
Vediamo sperimentalmente come è possibile ottenere π. Dalla formula dell'area , π corrisponde al rapporto tra l'area del cerchio e il quadrato del suo raggio

$\pi = A / r^2$

che può in maniera elementare essere enunciato sotto forma della seguente domanda: Quante volte il quadrato che ha per lato il raggio del cerchio entra nel cerchio che ha per raggio il lato dello stesso quadrato? Una soluzione a tale domanda potrebbe essere trovata costruendo con diversi materiali omogenei cerchi sullo schema del seguente disegno



Dai quali mediante un seghetto, con la massima precisione si tagliano i seguenti pezzi



raggio del cerchio = lato del quadrato

Con una bilancia analitica, a lettura digitale, si pesano il cerchio e il quadratino che ha per lato il raggio. Calcolato quindi su cerchi di varie misure il rapporto tra peso del cerchio e peso del quadratino, si ottiene il risultato che compare nella seguente tabella:

MATERIALE	RAGGIO	SPESSORE	PESO QUADRATO	PESO CERCHIO	RAPPORTO TRA I PESI
LINOLEUM	5cm	0,4cm	12g	37,68g	3,14
	10cm	0,4cm	48g	150,72g	3,14
	15cm	0,4cm	108g	339,12g	3,14
COMPENSATO	5cm	0,5cm	10g	31,4g	3,14
	10cm	0,5cm	40g	125,6g	3,14
	15cm	0,5cm	90g	282,6g	3,14
CARTONE PRESSATO	5cm	0,4cm	9g	28,6g	3,14
	10cm	0,4cm	36g	113,04g	3,14
	15cm	0,4cm	81g	254,34g	3,14
PLEXIGLASS	5cm	0,5cm	14,75g	46,31g	3,14
	10cm	0,5cm	59g	185,26g	3,14
	15cm	0,5cm	132,75g	416,83g	3,14

Osserviamo che se per ogni cerchio e quadratino corrispondente, con spessore e peso specifico uguali, a pesi uguali corrispondono superfici uguali, quindi al rapporto tra i pesi corrispondono superfici uguali e al rapporto tra i pesi si può sostituire quello delle aree.

In termini matematici può essere espresso quanto detto, mediante la seguente uguaglianza:

$$\pi = Pesocerchio / Pesoquadrato = A_c * h_c * ps / A_q * h_q * ps \,.$$

Semplificando opportunamente perveniamo

$\pi = A_c / A_q$

dove con A_c, A_q, h_c, h_q, ps denotiamo rispettivamente l'area del cerchio,l'area del quadrato, lo spessore del cerchio, lo spessore del quadrato e il peso specifico del materiale.

Da

$A / r^2 = 3.14$

deduciamo

$A = r^2 * 3.14$

Indichiamo con π l'area del cerchio di raggio 1.

2.9 I numeri reali

Per quanto un aritmetico come Pitagora, possa vantare il potere dei numeri, la natura sembra schernirlo mostrando la esistenza di lunghezze che nessun numero riesce a stimare in termini di unità. Il problema non rimase in questa forma geometrica, appena fu inventata l'algebra, lo stesso problema si presentò per la soluzione di equazioni.
Se dividiamo tutti i rapporti in due classi, a seconda che i loro quadrati siano minori di 2 o no, troviamo che i rapporti i cui quadrati non sono minori di 2 hanno tutti un quadrato maggiore di 2. Non esiste un massimo

dei rapporti il cui quadrato è minore di 2 e non esiste minimo per i rapporti il cui quadrato è maggiore di 2. Non esiste un limite inferiore prossimo a 0 per la differenza tra i numeri il cui quadrato è minore di 2 ed i numeri il cui quadrato è maggiore di 2. Possiamo dividere tutte le frazioni in due classi tali che tutti i termini di una classe sono minori di tutti i termini dell'altra, mentre non esiste un massimo per la prima come non esiste un minimo per la seconda. Tra queste due classi, dovrebbe trovarsi radice quadrata di 2, non c'è niente. Il metodo, di dividere tutti i termini di una serie in due classi, una delle quali precede l'altra, fu esposto da Dedekind, ed è indicato conseguentemente come *taglio di Dedekind*. Nel punto di separazione si verificano quattro casi distinti:

1) Può esistere un massimo per la sezione inferiore ed un minimo per la sezione superiore.
2) Può esistere un massimo per l'una e non esserci un minimo per l'altra.
3) Può non esistere un massimo per l'una ma un minimo per l'altra.
4) Può non esserci ne un massimo per l'una ne un minimo per l'altra.

Il primo caso valido per una serie in cui esistono termini consecutivi, ad esempio nella serie degli interi, una sezione inferiore deve finire con un numero n ed una sezione superiore deve cominciare con $n+1$. Il secondo caso sarà illustrato dalla serie dei rapporti se prendiamo come sezione inferiore tutti i rapporti minori di 1, includendo 1, e nella sezione superiore tutti i rapporti maggiori di 1. Il terzo caso si esemplifica prendendo per sezione inferiore tutti i rapporti minore di 1, e per sezione superiore tutti i rapporti maggiori di 1 con 1 incluso. Il quarto caso si illustra ponendo nella sezione inferiore tutti i rapporti il cui quadrato è minore di 2 e nella sezione superiore tutti i rapporti il cui quadrato e maggiore di 2. Escludendo il primo di questi quattro casi, perché presente solo nelle serie in cui esistono termini consecutivi, nel secondo dei quattro casi diciamo che il massimo della sezione inferiore è il limite inferiore della sezione superiore e di qualsiasi insieme di termini scelti dalla sezione superiore in modo tale che nessun termine della sezione superiore venga prima di tutti gli altri. Nel terzo caso, diremo che il minimo della sezione superiore è il limite superiore della sezione inferiore, e di ogni insieme di termine scelti dalla sezione inferiore tale che nessun termine della sezione inferiore venga dopo alcuni di essi.

Nel quarto caso, infine, diremo che esiste una *"separazione"* o *"gap"*; che sia la sezione inferiore che quella superiore non hanno né un limite né un ultimo termine. Quando si verifica questo caso, possiamo anche dire che abbiamo una "*sezione irrazionale"*, in quanto sezioni di serie di rapporti che presentano *separazioni* quando corrispondono a numeri irrazionali. Ciò che ha ritardato la formulazione della teoria dei numeri irrazionali è stato l'errore di pensare che esistessero *limiti* della serie dei rapporti. Diamo una definizione di *limite*. Si dice che un termine *x* è il *limite superiore* di una classe *a* rispetto alla relazione P se:

1) *a* non ha massimo in P
2) ogni membro di *a* che appartiene al campo di P precede *x*
3) ogni membro del campo di P che precede *x* precede anche alcuni membri di *a* ("precede" sta per "ha la relazione P con")

Questo presuppone la seguente definizione di *massimo*: un termine *x* è un *massimo* della classe *a* rispetto alla relazione P se *x* è un membro di *a* e del campo di P e non ha la relazione P con nessun altro membro di *a.*
Il *minimo* di una classe rispetto a P è il massimo rispetto alla inversa di P; ed il limite inferiore rispetto a P è il limite superiore rispetto alla inversa di P. Le nozioni di minimo e di massimo non richiedono in modo essenziale che le relazioni rispetto alle quali sono definite siano seriali. Una nozione spesso importante è quella di *limite superiore o massimo* che chiameremo *"confine superiore"*. Dunque il *confine superiore* di un insieme di termini scelti da una serie è il loro ultimo termine, se esiste, mentre, se non esiste, è il primo termine dopo di loro, se c'è. Se non c'è né un massimo né un limite, non c'è confine superiore. Il *confine superiore* è il limite inferiore o il minimo. Tornando ai quattro tipi di taglio di Dedekind, risulta evidente che nei primi tre casi ogni sezione ha un confine, mentre nel quarto caso non esistono confini. E' anche chiaro che, ogni qualvolta la sezione inferiore ha un confine superiore, la sezione superiore ha un confine inferiore. Nel secondo e terzo caso, i due confini sono identici. Una serie si chiama *"Dedekindiana"* quando ogni sezione ha un confine, superiore o inferiore a seconda del caso. Abbiamo visto che le serie dei rapporti in ordine di grandezza non sono dedekindiane. Non esiste però un limite *razionale* dei rapporti il cui quadrato è minore di 2, si è giunto a postulare un limite *irrazionale,* che rientra la separazione dedekindiana. Dedekind stabiliva l'assioma che la separazione deve sempre essere colmata, cioè ogni sezione deve avere un confine. Per tale ragione le serie che verificano questo assioma vengono chiamate *dedekindiane*. Esiste però un numero infinito di serie per le quali questa circostanza non si verificano. E' chiaro che un taglio irrazionale di Dedekind, in qualche modo, rappresenta un irrazionale. Cerchiamo di estrarre una definizione precisa; e per fare ciò

dobbiamo disabituare la nostra mente a pensare che un irrazionale deve essere il limite di una serie di rapporti. Proprio come i rapporti il cui denominatore è 1 non si identificano i numeri interi, così i numeri razionali che possono essere maggiori o minori degli irrazionali e possono avere dei numeri irrazionali come loro limite, non devono essere identificati con i rapporti. Dobbiamo definire un nuovo tipo di numeri, i *numeri reali*, dei quali una parte sarà formata da numeri razionali ed un'altra dagli irrazionali.

Per decidere chi sono i reali, osserviamo che un numero irrazionale è rappresentato da un taglio irrazionale ed un taglio è rappresentato dalla sua sezione inferiore. Limitiamoci ai tagli nei quali la sezione inferiore non ha un massimo; chiameremo la sezione inferiore *"segmento"*. Allora i segmenti che corrispondono a frazioni sono quelli costituiti da tutti i rapporti minori del rapporto al quale corrispondono, che è il loro limite; mentre i segmenti che rappresentano numeri irrazionali sono quelli che non hanno confine. Un numero *reale* è un segmento della serie di rapporti in ordine di grandezza. Un numero *irrazionale* è un segmento della serie dei rapporti che non ha confine. Un *"numero razionale reale"* è un segmento della serie dei rapporti che ha un confine. Pertanto un numero razionale reale è formato da tutti i rapporti minore di un certo rapporto, corrispondente proprio del numero reale razionale. Esempio: il reale 1, e la classe delle frazioni proprie, la radice quadrata di 2 è il limite superiore di tutti i segmenti della serie delle frazioni che corrispondono alle frazioni il cui quadrato è minore di 2. Ancora la radice quadrata di 2 è il segmento formato da tutte le frazioni il cui quadrato è minore di 2. E' facile dimostrare che la serie di segmenti di una serie qualsiasi è dedekindiana. Non esiste alcuna difficoltà per quanto riguarda la definizione di addizione e moltiplicazione per numeri reali così definiti. Dati due numeri reali *m* ed

n, ognuno essendo una classe di frazioni, prendiamo un membro qualsiasi di m ed un membro qualsiasi di n e sommiamoli secondo le regole della somma di frazioni. Formiamo la classe di tutte le somme ottenibili variando i membri scelti per m e n. Questo fornisce una nuova classe di frazioni, ed è facile provare che si tratta di un segmento della serie delle frazioni. La somma aritmetica di due numeri reali è la classe delle somme aritmetiche di un membro dell'una e di un membro dell'altra, tali membri scelti in tutti i modi possibili. Possiamo definire il prodotto aritmetico di due numeri reali esattamente nella stessa maniera, moltiplicando un membro di una classe di frazioni per un membro dell'altra in tutti i modi possibili. La classe di frazioni così formata viene definita prodotto di due numeri reali. In tutte queste definizioni la serie delle frazioni deve essere definita in modo tale che sia zero che infinito ne vengano esclusi. Infine non esistono difficoltà per estendere la definizione ai numeri reali positivi e negativi, e alla loro somma e moltiplicazione.