TEOREMA DI PITAGORA

Francobollo greco dedicato al celebre teorema

TEOREMA DI PITAGORA

Livello scolare: 1° biennio

Abilità interessate:

- Conoscere le caratteristiche generali dei poligoni
- Saper confrontare ed operare con segmenti ed angoli
- Conoscere i concetti di grandezza e di unità di misura
- Conoscere gli enti fondamentali della geometria

TEOREMA DI PITAGORA

- Possedere abilità operative in R
- Saper calcolare l'area di una figura piana
- Conoscere la relazione di equiestensione tra figure piane
- Conoscere le principali proprietà dei triangoli

TEOREMA DI PITAGORA

Obiettivi:

- Conoscere e verificare il teorema di Pitagora
- Dimostrare l'irrazionalità di alcuni numeri
- Verificare l'esistenza di grandezze incommensurabili
- Conoscere il concetto di terna pitagorica primitiva o derivata
- Saper risolvere problemi geometrici applicando il teorema di Pitagora

TEOREMA DI PITAGORA

Nuclei coinvolti:

- Misurare
- Numeri e algoritmi
- Spazi e figure
- Risolvere e porsi problemi
- Laboratorio di matematica

TEOREMA DI PITAGORA

Un po' di storia…

- Pitagora, filosofo e matematico greco

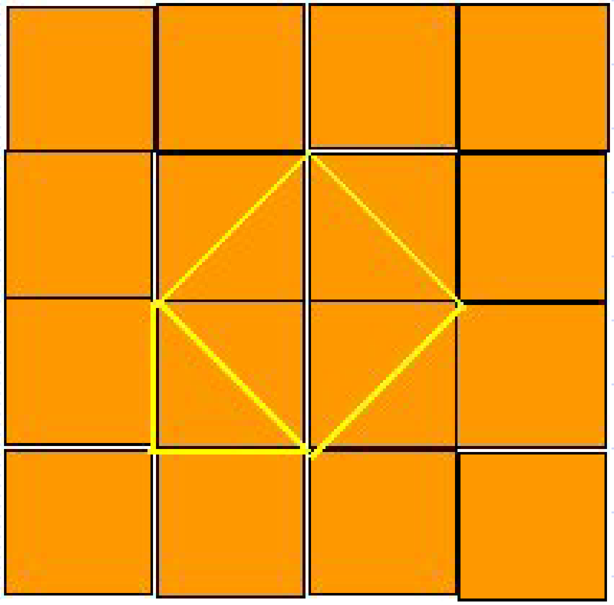
- Scoperte attribuite a Pitagora

  - Teorema di Pitagora
  - Scoperta dell'incommensurabilità tra la diagonale e il lato del quadrato
  - Scoperta dei numeri irrazionali

TEOREMA DI PITAGORA

Leggenda sulla scoperta del Teorema di Pitagora:

Si racconta che…



TEOREMA DI PITAGORA

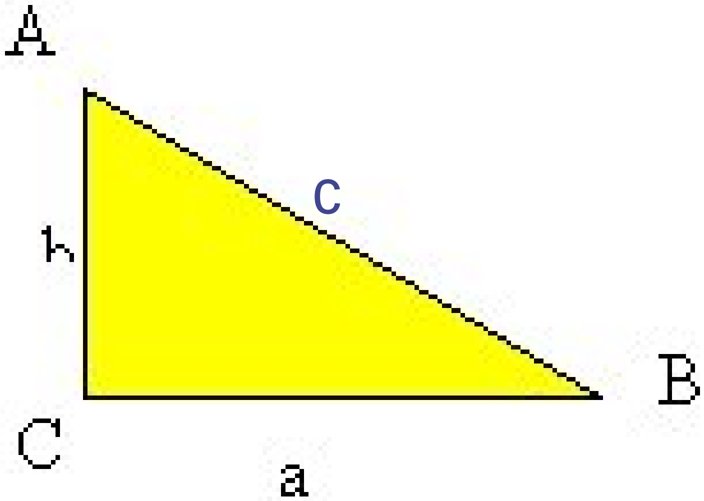
… **il quadrato costruito sull’ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui due cateti**.

Questo risultava evidente nel caso della piastrella quadrata, cioè di un triangolo rettangolo isoscele. Ma poteva essere vero, si chiese Pitagora, anche nel caso generale, con cateti di lunghezza diversa?

TEOREMA DI PITAGORA

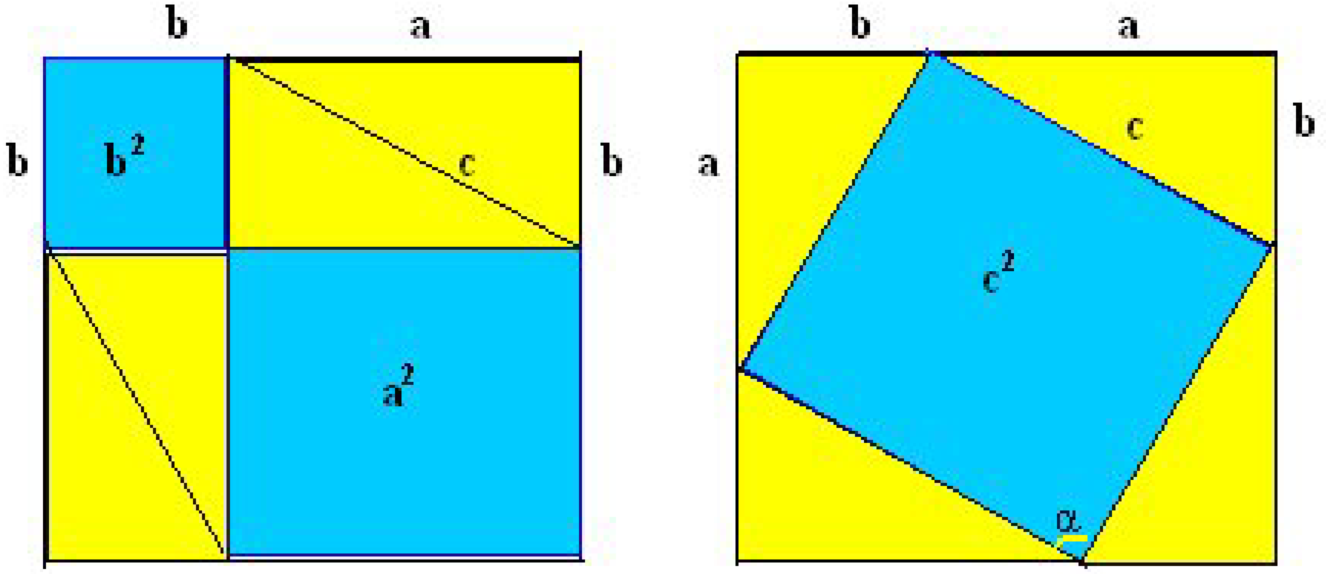
Dimostrazione:

dato il triangolo rettangolo ABC di cateti a, b e ipotenusa c



TEORЕMA DI PITAGORA

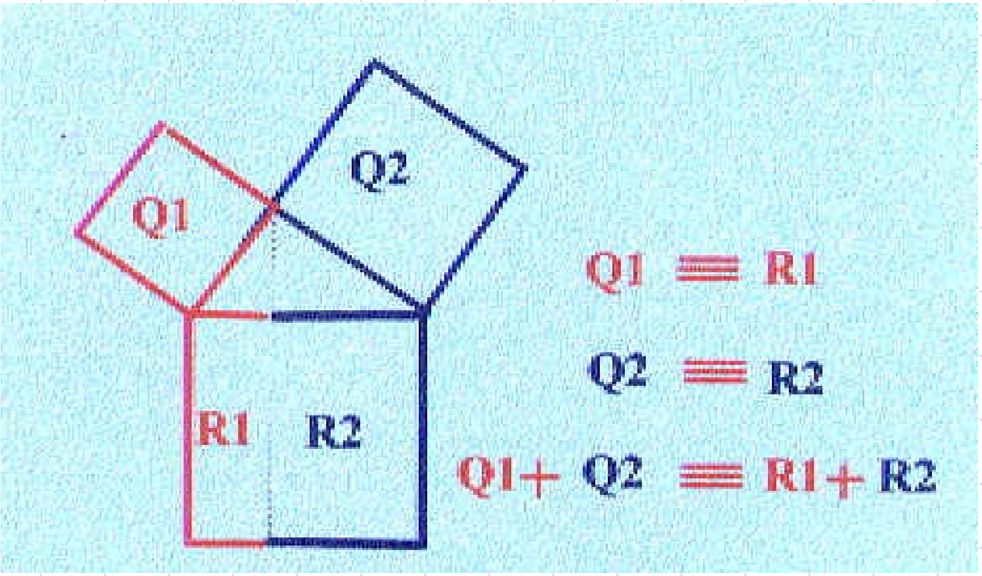
costruiamo due quadrati equivalenti, che abbiano come lato la somma dei due cateti, a + b.



TEOREMA DI PITAGORA

Altre dimostrazioni:

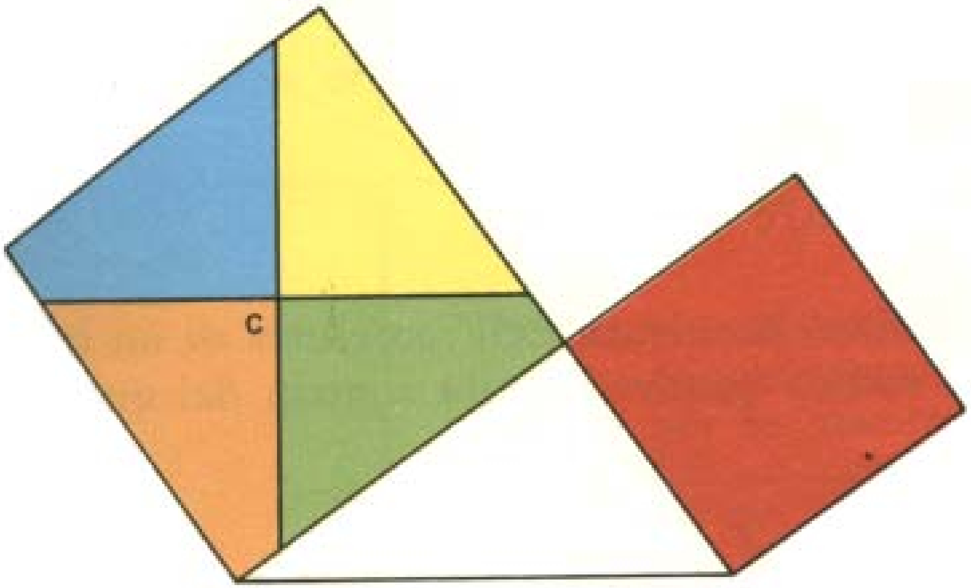
1°



- per il 1° teorema di Euclide -

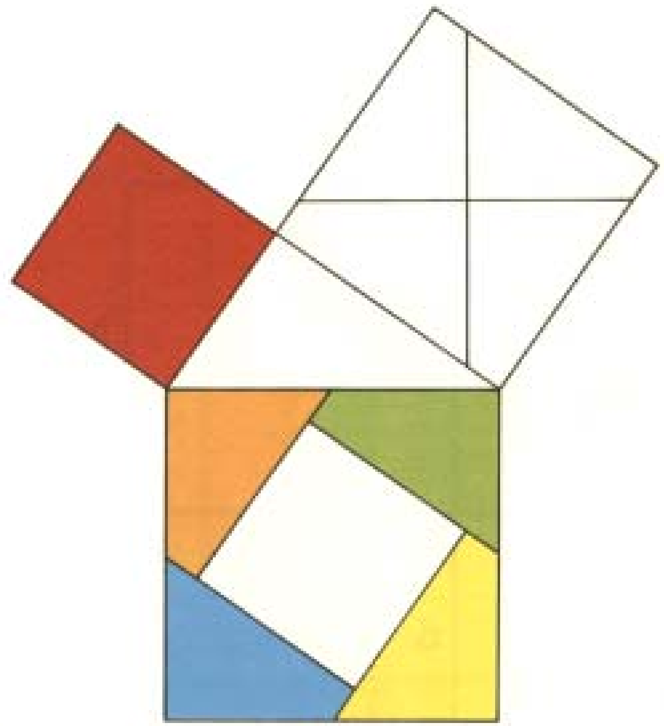
TEOREMA DI PITAGORA

2°



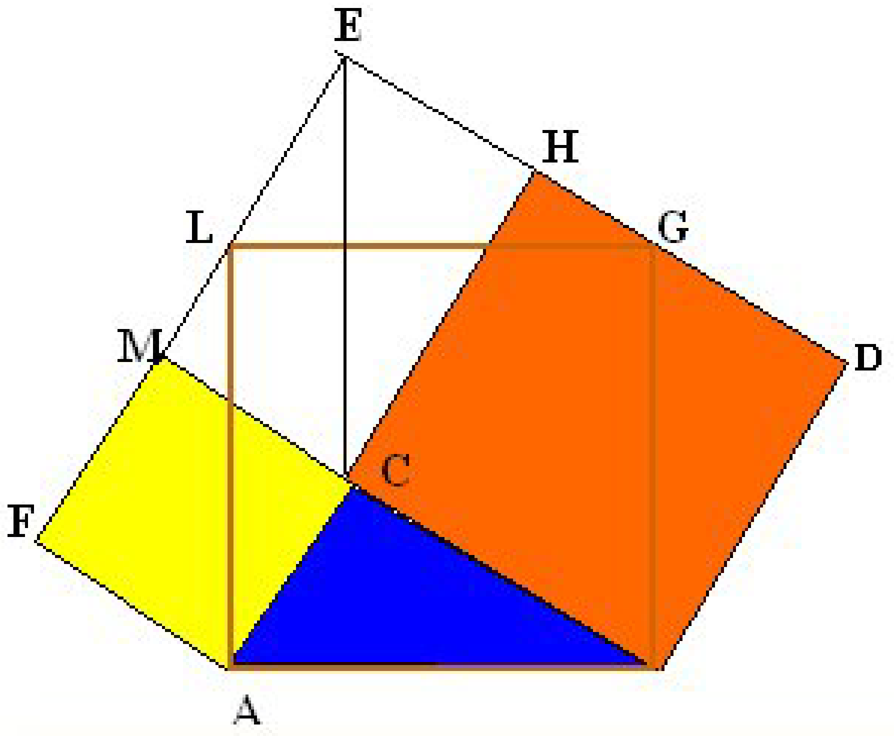
TEOREMA DI PITAGORA

Disponiamo poi questi quadrilateri come in figura:



TEOREMA DI PITAGORA

3°



TEOREMA DI PITAGORA

Dalla figura si vede che: i triangoli ABC, CEH, CEM, BGD, EGL, AFL sono tutti equivalenti. Inoltre osserviamo che il poligono ABDEF può essere scomposto in due modi diversi:

$$ABDEF = AC^2 + BC^2 + \Delta ABC + \Delta CEH + \Delta CEM$$

e

$$ABDEF = AB^2 + \Delta BGD + \Delta EGL + \Delta AFL$$

TEOREMA DI PITAGORA

Dall'uguaglianza delle due relazioni e dall'equivalenza dei triangoli indicati, ricaviamo:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

TEOREMA DI PITAGORA

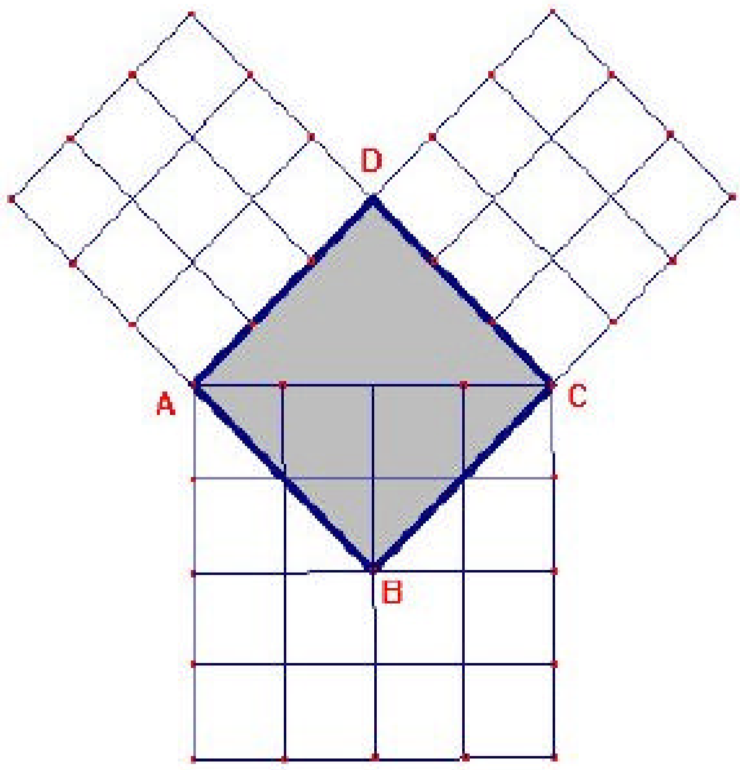
I Pitagorici e le grandezze incommensurabili.

Verifichiamo che:

"***Il lato e la diagonale di un quadrato sono incommensurabili***"

TEOREMA DI PITAGORA

Dimostrazione:



TEOREMA DI PITAGORA

Per il teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo isoscele ACD, il quadrato costruito su AC e equivalente alla somma dei due quadrati uguali costruiti su AD e DC. Ragionando per assurdo e ammettendo AC e AD siano segmenti commensurabili si avrà che essi hanno un sottomultiplo comune, contenuto m volte in AC ed n volte in AD. Ciò consentirebbe di suddividere ciascun lato dei quadrati costruiti su AD e DC in n parti uguali e ciascun lato del quadrato costruito su AC in m parti, uguali fra loro ed uguali alle precedenti.

TEOREMA DI PITAGORA

Congiungendo i punti di divisione, così ottenuti, con segmenti paralleli ai lati, i quadrati di lati AD e DC verrebbero scomposti, ciascuno, in quadratini, uguali fra loro ed uguali agli quadratini nei quali rimarrebbe scomposto il quadrato di lato AC.

Per quando detto, il numero dei quadratini che ricoprono il quadrato di lato AC dovrebbe essere doppio del numero dei quadratini che ricoprono il quadrato di lato AD.

TEOREMA DI PITAGORA

Dovrebbe, cioè, valere la seguente uguaglianza fra numeri interi

$$m^2 = 2\,n^2$$

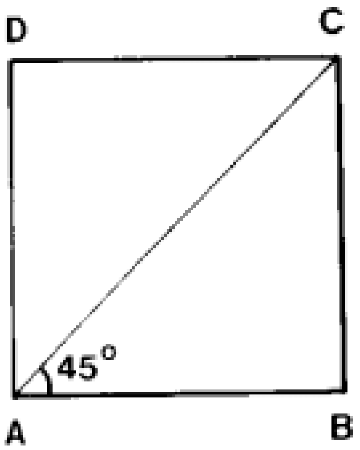
Ma la precedente uguaglianza è assurda.

Infatti, m^2 o non contiene il fattore 2 o lo contiene con esponente pari, mentre $2\,n^2$ contiene il fattore 2 necessariamente con esponente dispari.

TEOREMA DI PITAGORA

Proposta di lavoro

Un contadino possiede un appezzamento di terreno di forma quadrata di lato 2km. Decide di recintarlo con una fune, dividendolo in due triangoli uguali. Quanto misura la fune?



TEOREMA DI PITAGORA

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo ABC si ricava che:

$$AC = 2\sqrt{2}$$

In generale, la relazione tra il lato l e la diagonale d di un quadrato è

$$d = l\sqrt{2}$$

In particolare se il lato del quadrato è l'unità di misura, ossia misura 1, la diagonale misura $\sqrt{2}$

Il teorema di Pitagora ci fornisce un metodo per rappresentare graficamente il numero irrazionale $\sqrt{2}$ sulla retta numerica.

TEOREMA DI PITAGORA

Il procedimento è il seguente:

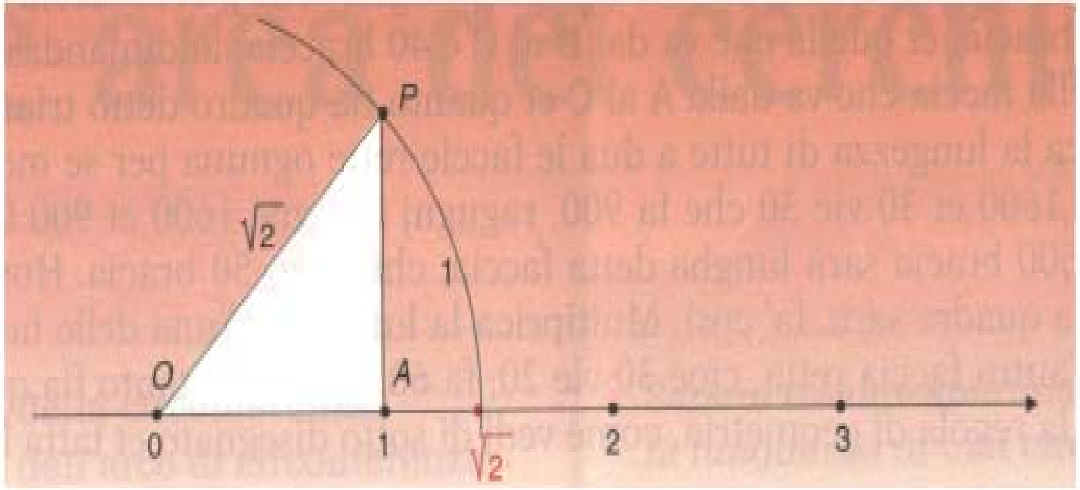
dopo aver fissato l'origine, scegliamo sulla retta il segmento unitario. Poi costruiamo il quadrato che ha per lato il segmento unitario e di questo tracciamo la diagonale, che misura, per il teorema di Pitagora, $\sqrt{2}$

Ora puntiamo il compasso nell'origine con apertura uguale alla diagonale del quadrato e tracciamo un arco che intersechi la retta in un punto P (dalla parte dei numeri positivi). Il segmento OP misura $\sqrt{2}$

TEOREMA DI PITAGORA

dunque al punto P possiamo associare come ascissa il numero : $\sqrt{2}$

$\overline{OA} = 1$ $\overline{AP} = 1$ $\overline{OP} = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{AP}^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$



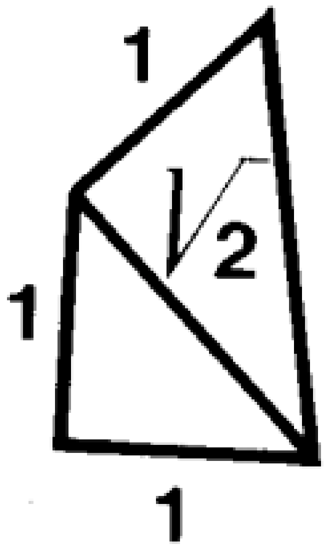
TEOREMA DI PITAGORA

Possiamo ora costruire un segmento lungo $\sqrt{3}$:

prendiamo ancora il quadrato unitario e consideriamo uno dei due triangoli rettangoli isosceli che otteniamo tagliandolo lungo la diagonale.

TEOREMA DI PITAGORA

Costruiamo sull'ipotenusa di questo triangolo un altro triangolo rettangolo i cui lati misurino $\sqrt{2}$ e 1.



TEOREMA DI PITAGORA

Quanto misura la sua ipotenusa?

Con il teorema di Pitagora troviamo che l'ipotenusa misura:

$$\sqrt{1^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{1+2}=\sqrt{3}$$

Abbiamo dunque ottenuto un segmento lungo $\sqrt{3}$

TEOREMA DI PITAGORA

Seguendo lo stesso procedimento otterremo dei triangoli le cui ipotenuse misurano

$\sqrt{4}$ $\sqrt{5}$ $\sqrt{6}$ $\sqrt{7}$

e così via .

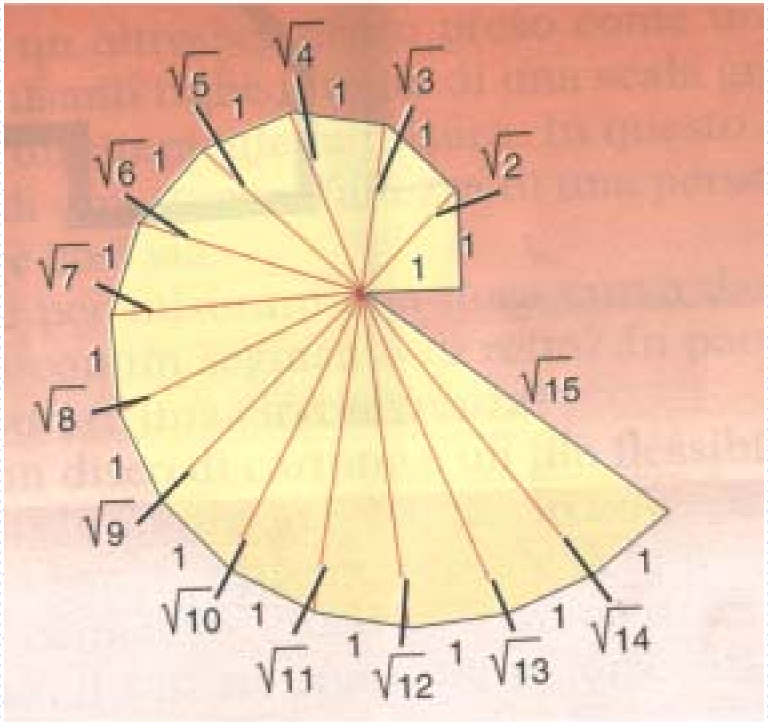
TEOREMA DI PITAGORA

In questo modo possiamo vedere che ad ogni numero irrazionale corrisponde un numero sulla semiretta numerica Or.

Osserviamo che, ripetendo più volte il ragionamento, otteniamo una spirale in cui i segmenti neri sono tutti uguali all'unità di misura 1, mentre quelli rossi sono lunghi, rispetto alla stessa unità di misura

$$\sqrt{2} \quad \sqrt{3} \quad \sqrt{4} \quad \sqrt{5}$$

TEOREMA DI PITAGORA

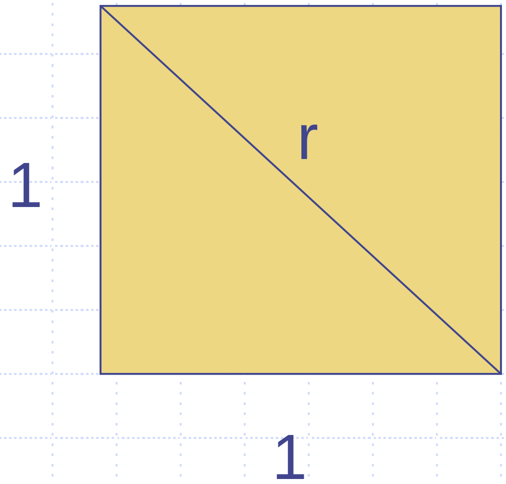


TEOREMA DI PITAGORA

Nota:

Quanto vale $\sqrt{2}$?

Consideriamo un quadrato di lato 1 e tracciamone la diagonale r, che per il teorema di Pitagora vale $\sqrt{2}$



TEOREMA DI PITAGORA

Essendo 1 < r < 2, avremo che r = 1,...., ossia

r = 1 + e (1)

dove con e indichiamo l'errore.

Elevando al quadrato ambo i membri della (1), risulta :

2 = $r^2 = 1 + e^2 + 2e$

da cui 1= $e^2 < 2e$, essendo $e^2 < 2e$ possiamo trascurare

e^2 , ossia e = 0,5.

TEOREMA DI PITAGORA

Quindi r = 1,5, che è un'approssimazione migliore della precedente .

Ripetendo il ragionamento :

r = 1,5 + e_1 , ed elevando al quadrato : 2=2,25 + 3 e_1 + e_1^2

da cui : e_1 = - 0,08…

Quindi r = 1,5 – 0.08 =1,42.

Iterando il procedimento troviamo una serie di valori approssimati :

TEOREMA DI PITAGORA

1 ; 1,5 ; 1,42 ; 1,415; ...

che vanno restringendosi indefinitamente intorno a

$$\sqrt{2}$$

TEOREMA DI PITAGORA

“ La radice di due era molto preoccupata: ormai erano passati trenta decimali senza che le venisse il periodo. Temeva di essere incinta, anche se cio' le sembrava irrazionale... “

Napster

TEOREMA DI PITAGORA

Le terne pitagoriche

In generale una terna di interi a,b,c formano una ***terna di numeri pitagorici*** se :

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Se a, b, c non hanno fattori comuni, la terna è detta ***primitiva***, altrimenti è detta **derivata** .

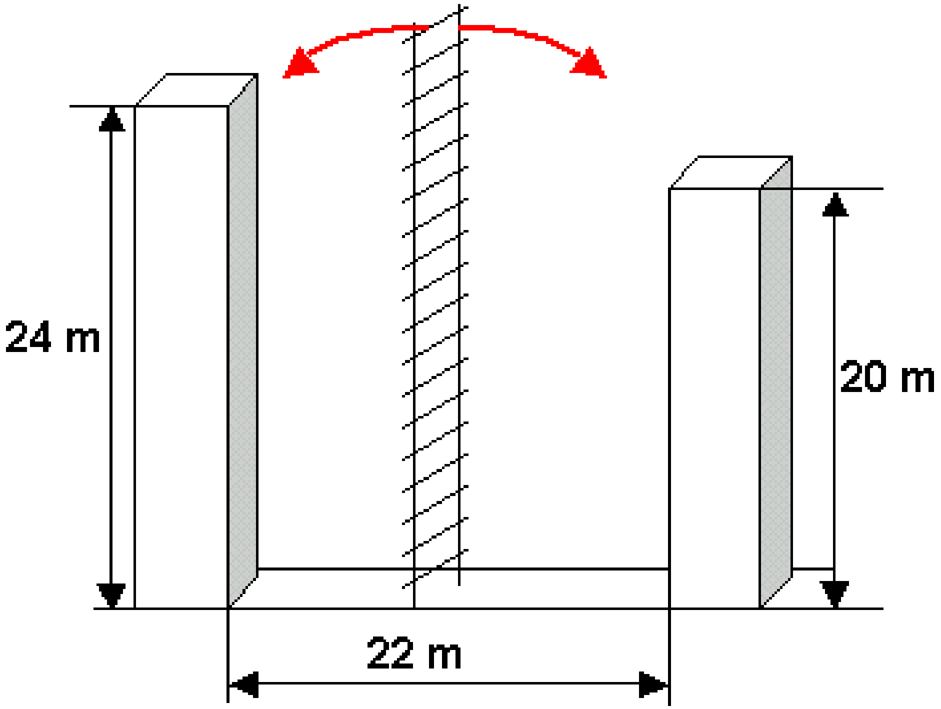
TEOREMA DI PITAGORA

Proposta di lavoro

La scala fra due torri

Due torri sono alte rispettivamente 20 m e 24 m, e distano 22 m l'uno dall'altra.

TEOREMA DI PITAGORA



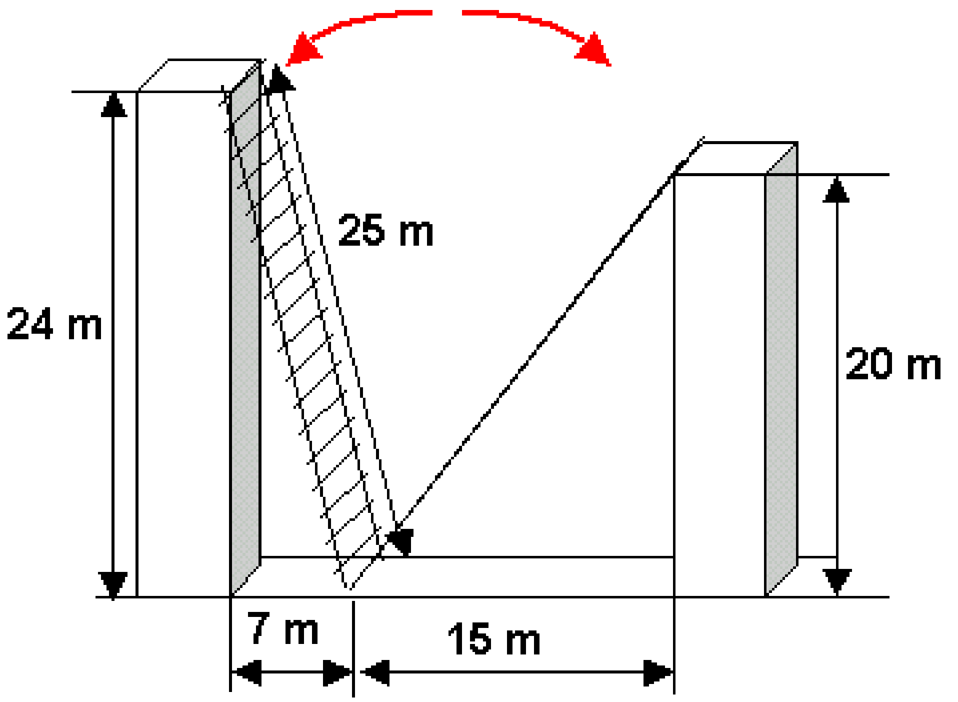
TEOREMA DI PITAGORA

In quale punto del suolo deve essere posata una scala in modo che, appoggiata all'una o all'altra torre, ne raggiunga esattamente la cima?

Quanto deve essere alta la scala?

La scala deve essere fissata su un punto P del terreno equidistante delle sommità delle due torri.

TEOREMA DI PITAGORA



TEOREMA DI PITAGORA

Si possono formare due triangoli rettangoli che devono avere la stessa ipotenusa, la qual cosa ci permette di scrivere l’equazione:

$$24^2 + x^2 = 20^2 + (22-x)^2$$

$$576 + x^2 = 400 + 484 - 44x + x^2$$

$$44x = 308$$

$$x = 7$$

TEOREMA DI PITAGORA

La base della scala deve essere posta a 7 m dalla base della torre A.

Sempre il teorema di Pitagora ci permette di trovare l'altezza della scala, che è 25 m.

The End!!!