

# **Esperienze di apprendimento cooperativo: le equazioni di secondo grado**

*Anna Baldrighi e Claudia Bellinzona  
ITIS “Cardano” – Pavia*

## **1. Introduzione**

L'esperienza didattica qui presentata è stata realizzata nel corso dell'anno scolastico 2003-04 in classi seconde dell'ITIS “Cardano” di Pavia, con una modalità di apprendimento cooperativo che si basa su quanto esposto nell'intervento *“Insegnare e apprendere cooperando: esperienze e prospettive”* di Pesci A. e riportato in questi stessi Atti.

L'esperienza in classe è stata sviluppata attraverso le seguenti fasi di lavoro:

- proposta di un test iniziale per stimolare nei ragazzi una riflessione individuale sulla loro relazione con la matematica, con la richiesta di esprimere la loro “storia personale” attraverso una libera descrizione o la scelta di opportune metafore
- presentazione del lavoro e della metodologia di apprendimento cooperativo
- realizzazione dell'itinerario disciplinare sviluppato attraverso schede di gruppo
- valutazione dell'insegnante dei progressi di tipo disciplinare e relazionale, con l'aiuto di opportuni strumenti di registrazione realizzati per sostenere e guidare l'osservazione degli studenti sia durante il lavoro di gruppo sia nei momenti di discussione con tutta la classe
- valutazione da parte degli alunni sull'esperienza svolta, attraverso la compilazione di un questionario proposto a conclusione dell'attività.

In questo contributo si cercherà di presentare l'evoluzione dei due aspetti cognitivo e relazionale che, a nostro parere, risultano complementari nel cammino dello studente verso la conoscenza. Dopo aver esposto l'itinerario disciplinare, riguardante le equazioni di secondo grado, si vedranno nel dettaglio degli esempi di soluzioni proposte dai gruppi, e saranno riportate alcune riflessioni circa l'osservazione dei cambiamenti rilevati in riferimento alle relazioni sociali e interpersonali interne alla classe.

## **2. Il percorso didattico**

Nella fase di studio del progetto è stato messo a punto un percorso che, a partire da semplici problemi di secondo grado, portasse alla costruzione della formula risolutiva delle equazioni passando attraverso il metodo del completamento del quadrato.

Dopo alcuni esercizi di prova, è stata proposta una scheda di lavoro in cui veniva presentata una equazione di secondo grado già risolta con il metodo sopra indicato. Alla richiesta di commentare e giustificare i vari passaggi, tutti hanno fornito risposte corrette ed esaurienti.

Nella scheda successiva erano gli alunni a dover risolvere una equazione aiutati da uno schema guida. Soltanto un gruppo ha trovato difficoltà, per una errata interpretazione dei suggerimenti indicati; tuttavia, l'esposizione dei relatori e la discussione di classe hanno consentito a tutti i suoi componenti di rendersi conto degli errori commessi e di correggerli.

E' stato quindi chiesto ai gruppi di risolvere un'altra equazione applicando una procedura analoga, ma questa volta non è stata loro fornita alcuna traccia. Alcuni hanno presentato soluzioni corrette, altri hanno trovato difficoltà; in ogni caso i protocolli relativi a questa proposta di lavoro sono risultati tra i più stimolanti per la discussione di classe e per la relativa interiorizzazione del procedimento.

Come ultima scheda, dopo numerosi esercizi individuali svolti sia in classe che a casa, è stato chiesto ai gruppi di generalizzare la procedura applicandola all'equazione:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \in R, \quad a \neq 0.$$

Tre gruppi sono arrivati alla formula risolutiva in maniera corretta. Ancora una volta la successiva discussione di classe ha permesso ai vari gruppi di confrontarsi, di chiedere chiarimenti sulle varie risposte e di focalizzare gli aspetti fondamentali della questione affrontata. La partecipazione attiva a questa fase ha consentito a tutti di arrivare all'acquisizione consapevole della formula trovata. Proponiamo ora la parte di esperienza riguardante due schede fondamentali con alcuni esempi di soluzioni e relative riflessioni.

### **3. L'applicazione del metodo del completamento del quadrato**

Con la scheda 7 i ragazzi sono stati stimolati a risolvere un'equazione di secondo grado con il metodo del completamento del quadrato, sulla base del lavoro proposto nelle schede precedenti.

#### *SCHEDA 7*

*Nelle due attività precedenti abbiamo individuato un modo per risolvere le equazioni complete. Cosa potete osservare applicando la stessa procedura all'equazione  $5x^2 + 3x - 2 = 0$  ?*

Proponiamo qui di seguito tre tipologie di risposta: nei primi due casi si osserva l'applicazione del metodo richiesto affrontato con approcci diversi, mentre nel terzo si propone un esempio di risposta errata:

***Soluzione 1***

$$5x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$5 \cdot (5x^2 + 3x - 2) = 0 \cdot 5$$

$$25x^2 + 15x - 10 = 0$$

$$\frac{49}{4} + 25x^2 + 15x - 10 = 0 + \frac{49}{4}$$

$$25x^2 + 15x + \frac{9}{4} = \frac{49}{4}$$

$$\left(5x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$$

$$5x + \frac{3}{2} = \pm \frac{7}{2}$$

$$5x = -\frac{3}{2} + \frac{7}{2} \rightarrow 5x = 2 \rightarrow x = \frac{2}{5}$$

$$5x = -\frac{3}{2} - \frac{7}{2} \rightarrow 5x = -5 \rightarrow x = -1$$

### ***Soluzione 2***

$$5x^2 + 3x - 2 = 0 \quad (\cdot 20)$$

$$100x^2 + 60x - 40 = 0$$

$$100x^2 + 60x = 40 \quad (+9)$$

$$100x^2 + 60x + 9 = 49$$

$$(10x + 3)^2 = 49$$

$$10x + 3 = \pm 7$$

$$10x = -3 \pm 7$$

$$10x = -10 \rightarrow x = -1$$

$$10x = 4 \rightarrow x = \frac{2}{5}$$

$$S = \left\{ -1, \frac{2}{5} \right\}$$

### ***Soluzione 3***

$$5x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$5x^2 + 3x = +2$$

$$x \cdot (5x + 3) = +2$$

$$x = 2 \quad x = \frac{3}{5}$$

In entrambi i casi 1 e 2 i ragazzi hanno lavorato con impegno e determinazione e, basandosi sul lavoro svolto nelle schede precedenti, sono riusciti a ricostruire la procedura di risoluzione dell'equazione applicando il metodo del completamento del quadrato.

Le risposte sono corrette anche se si presentano in forme differenti.

Nel caso 1 il gruppo ha sviluppato il procedimento introducendo delle frazioni, mentre nel caso 2 i ragazzi hanno preferito lavorare con numeri interi seguendo quindi una procedura più semplice e con minori difficoltà di calcolo.

E' possibile osservare che in tali risposte non sono stati giustificati i vari passaggi, però ogni gruppo ha fornito le opportune spiegazioni e i necessari chiarimenti durante l'esposizione del relatore e nella fase di discussione con tutta la classe.

Nel caso 3, invece, si può osservare che il gruppo non ha applicato il metodo richiesto, ma si è avventurato nell'applicazione di un procedimento analogo alla legge di annullamento del prodotto in modo ovviamente scorretto. I componenti di tale gruppo si sono accorti dell'errore ancor prima della discussione, ascoltando l'esposizione degli altri relatori. Loro stessi hanno infatti dichiarato di aver affrontato il lavoro con troppa fretta e superficialità, senza un'adeguata riflessione sia nella fase di analisi del testo, che suggeriva di fare riferimento alle schede precedenti, sia nella fase di elaborazione del compito durante la quale hanno sviluppato la loro prima idea in modo scorretto e senza adeguate verifiche.

#### **4. La formula risolutiva delle equazioni di secondo grado**

Con la scheda 9 è stato chiesto ai ragazzi di applicare il metodo del completamento del quadrato nel caso dell'equazione di secondo grado scritta in forma generale, per portarli alla scoperta della relativa formula risolutiva. La scheda di lavoro era così formulata:

##### *SCHEDA 9*

*Applicando la procedura illustrata nelle schede precedenti, risolvete l'equazione generale:*

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad a \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$$

Anche in questo caso ci sono state risposte corrette e ben strutturate e risposte errate. L'esame delle soluzioni ha comunque fornito elementi costruttivi di discussione e di approfondimento.

Vengono di seguito presentati due esempi di risoluzione.

**Soluzione 1**

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$ax^2 + bx = -c$$

$$(ax^2 + bx) \cdot a = -a \cdot c \quad \text{multiplico per } a$$

$$4 \cdot a^2 x^2 + 4 \cdot abx = -4 \cdot ac \quad \text{multiplico per } 4$$

$$4a^2 x^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2 \quad \text{aggiungo } b^2$$

$$(2ax + b)^2 = -4ac + b^2$$

$$2ax + b = \pm \sqrt{-4ac + b^2}$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{-4ac + b^2}}{2a} \quad \text{oppure} \quad x = \frac{-b - \sqrt{-4ac + b^2}}{2a}$$

**Soluzione 2**

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$ax^2 + bx = -c$$

$$ax^2 + bx + d = -c + d$$

$$(cx + d)^2 = -c + d$$

$$cx + d = \sqrt{-c + d}$$

$$cx = -d \pm \sqrt{-c + d}$$

$$x = \frac{-d + \sqrt{-c + d}}{c}$$

$$x = \frac{-d - \sqrt{-c + d}}{c}$$

In primo luogo è necessario rilevare che la scheda 9 è risultata abbastanza impegnativa per i processi di astrazione e generalizzazione richiesti nella risoluzione del problema. Tuttavia, basandosi sul percorso sviluppato in precedenza, alcuni gruppi hanno evidenziato buone capacità di ragionamento e, attraverso il sostegno reciproco e un attivo confronto tra i vari componenti, sono riusciti a concludere positivamente quanto richiesto.

L'esempio di soluzione 1 mostra una risposta corretta e lineare nella sua stesura che evidenzia un adeguato utilizzo del simbolismo algebrico e una positiva capacità di generalizzazione.

Qualche difficoltà, in tal senso, si nota invece nella soluzione 2 dove, dopo un corretto avvio del procedimento, il gruppo introduce impropriamente la variabile  $d$  per poter arrivare in qualche modo ad una conclusione. Solo in fase di discussione i ragazzi hanno capito l'errore commesso e, in questo, sono stati aiutati da alcuni compagni che hanno suggerito loro di sviluppare il quadrato del binomio ottenuto, per verificare che la situazione iniziale era stata cambiata e non si stava più lavorando con l'equazione di partenza.

Così, come già osservato in precedenza, il confronto sui risultati ottenuti, la correzione degli errori e l'approfondimento delle questioni irrisolte ha permesso a tutti i ragazzi di acquisire consapevolmente la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado.

Inoltre i ragazzi hanno evidenziato soddisfazione nel poter applicare un metodo di risoluzione non imposto dall'insegnante, ma costruito in classe con la collaborazione di tutti e questo ha contribuito a migliorare l'autostima e la fiducia nelle capacità personali soprattutto negli alunni con difficoltà di apprendimento.



## **5. L'osservazione di alcuni cambiamenti...**

Nelle esperienze di apprendimento cooperativo svolte in questi anni, abbiamo potuto osservare e rilevare alcuni aspetti positivi che vengono evidenziati dalla letteratura in riferimento all'utilizzo di tale metodologia nei processi di insegnamento-apprendimento.

Anche in questa occasione ci sembra importante sottolineare, accanto all'evoluzione sul piano cognitivo, il miglioramento dei rapporti di tipo relazionale-sociale ottenuto all'interno delle classi coinvolte nell'attività sopra presentata. A tale proposito, riportiamo i casi di due alunne con difficoltà di integrazione nella classe di appartenenza.

A. è una ragazzina senza problemi di apprendimento, con un giudizio finale di terza media ottimo, che presenta un profitto mediamente più che buono, con ottimi risultati in alcune materie come ad esempio in matematica. Apparentemente ben inserita nella classe, preferisce tuttavia passare l'intervallo a chiacchierare con l'insegnante o con una compagna con cui condivide l'amore per gli animali.

Nel corso del biennio evidenzia un numero di assenze molto elevato, regolarmente giustificate dai genitori con motivi di salute. All'inizio della classe seconda il Consiglio di Classe, dopo aver constatato il ripresentarsi di tale problema, decide di affrontare la situazione promuovendo incontri con la famiglia e colloqui con la ragazza. Nonostante questi interventi le assenze continuano numerose.

Nel mese di marzo nella classe di A. prende il via l'esperienza di apprendimento cooperativo.

In fase di preparazione dei gruppi A. accetta la suddivisione fatta dall'insegnante e non manifesta alcuna preferenza sui compagni; si vede tuttavia costretta a cambiare più volte il gruppo per accontentare le richieste degli altri.

Durante le varie attività A. stupisce insegnanti e compagni con una presenza pressoché costante, lavora seriamente all'interno del suo gruppo assumendo responsabilmente tutti i ruoli e contribuendo in maniera attiva al raggiungimento degli obiettivi proposti.

Le risposte al questionario finale sull'esperienza svolta sono davvero una bella sorpresa: non soltanto A. afferma di aver conosciuto meglio i compagni con cui ha collaborato, ma da ragazzina giudiziosa e sensibile qual è, riesce anche a fare un'analisi sugli aspetti relazionali e a esprimere con molta sincerità le sue insicurezze e i suoi timori. Alla domanda: " *Che cosa ti è piaciuto di meno dell'esperienza compiuta?*" A. risponde: " *Sono rimasta dispiaciuta dal comportamento dei miei compagni all'inizio, quando si decidevano i gruppi, perché mi è sembrato che a nessuno facesse piacere stare in gruppo con me. Devo dire che, per fortuna, i componenti del mio gruppo hanno imparato a conoscermi. Negli ultimi lavori di gruppo, infatti, ci siamo divertiti e abbiamo scherzato, cosa che prima succedeva raramente*".

Anche il caso di D. risulta un esempio di situazione in cui l'attività svolta in gruppi di tipo cooperativo può essere un aiuto per superare alcune difficoltà che si manifestano nelle relazioni interpersonali all'interno di una classe.

D. è una ragazzina dolcissima proveniente dal Camerun, di madre lingua francese. Arriva in Italia nel 2002 e, ad anno scolastico inoltrato viene inserita in una classe prima insieme al fratello G. I compagni li accettano e l'anno trascorre serenamente, anche se i due ragazzi fanno gruppo a sé. Da un punto di vista del profitto, sia G. che D. si dedicano alla scuola con impegno costante e assiduo e riescono ad ottenere risultati accettabili, tenuto conto delle loro difficoltà linguistiche. La classe seconda comincia con qualche problema: qualche scherzo di troppo, qualche parola mal interpretata, l'impressione tra i compagni che i docenti facciano preferenze accettando elaborati meno precisi da parte di G. e D. Al primo Consiglio di Classe due insegnanti parlano anche di episodi di intolleranza.

Si cerca di chiarire la situazione mediante un incontro con la classe e con i rappresentanti dei genitori: i compagni e le famiglie sminuiscono i fatti parlando semplicemente di “scherzi”. Dopo una reazione di D. il clima della classe risulta compromesso.

E' in questo contesto che ha inizio il lavoro cooperativo.

D. viene inserita in un gruppo, i compagni ne farebbero volentieri a meno e, per la prima volta, manifestano apertamente tutto quello che pensano ferendo la sensibilità della ragazza.

Ma proprio in tale situazione è possibile osservare come l'assunzione di un ruolo all'interno del gruppo rivesta davvero una grande importanza. Pur litigando, infatti, ognuno deve svolgere le mansioni che il suo ruolo gli conferisce: l'orientato al gruppo deve sedare le liti, la memoria deve collaborare con il relatore, il relatore deve fare le prove di esposizione, e poi... c'è sempre la figura dell'osservatore che annota con solerzia tutto quanto succede all'interno del gruppo. E' necessario quindi che tutti collaborino per portare a buon fine il compito disciplinare perché ciò che conta è il risultato raggiunto dal gruppo; conviene allora con pazienza spiegare le parole nuove a D. e permetterle di rileggere la relazione più volte, per evitare un risultato negativo per il gruppo!

Dal canto suo D. non si scoraggia e reagisce con vigore, stupendo tutti con le sue osservazioni puntuali e precise allorché svolge il ruolo dell'osservatore, con i suoi interventi mirati quando è l'orientato al gruppo, con le registrazioni accurate quando svolge il ruolo della memoria.

I compagni cominciano a vederla sotto un'altra luce e D. si rivolge loro senza più pregiudizi; così gradualmente la situazione migliora e le relazioni personali diventano più costruttive.

I casi sopra riportati sono stati un ulteriore motivo di riflessione e discussione per il nostro gruppo di lavoro, in quanto mettono in evidenza la necessità, da parte dell'insegnante, di non trascurare alcuna delle componenti che caratterizzano lo sviluppo della persona nel progetto educativo.

Questa attenzione comporta indubbiamente un lavoro abbastanza complesso, ma ci sentiamo incoraggiati dal fatto che la caratteristica fondamentale di questa modalità di apprendimento è proprio quella di favorire il progredire di tutto il processo evolutivo sia nell'aspetto cognitivo che in quello relazionale, mettendo costantemente in gioco, interamente e nella sua quotidianità, il ragazzo coinvolto nel processo stesso.

Lavorando infatti in gruppi cooperativi, i ragazzi sviluppano l'autostima, le capacità di autocritica e di interpretazione dei successi e dei fallimenti, la sensibilità, il rispetto per gli altri, la corresponsabilità e tutto questo influisce positivamente sull'agire individuale a livello affettivo, motivazionale, cognitivo e comportamentale.

In conclusione, ci sentiamo ancora una volta motivati a proseguire su questa strada perché crediamo che anche l'educazione matematica passi attraverso una comunicazione che si fonda su relazioni umane più profonde e complete.

### **Bibliografia**

Le basi scientifiche di riferimento sono riportate nella seguente bibliografia:

**Pesci A.**, 2004, Insegnare e apprendere cooperando: esperienze e prospettive, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, Vol. 27A-B n. 6, 638-670.

**Baldrighi A., Fattori A., Pesci A.**, 2004, Una esperienza di apprendimento cooperativo nella scuola secondaria superiore: il teorema di Pitagora, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, Vol. 27B n. 2, 125-145

**Baldrighi A., Pesci A., Torresani M.**, 2003, Relazioni disciplinari e sociali nell'apprendimento cooperativo. Esperienze didattiche e spunti di riflessione, Atti Matematica e Difficoltà n. 12, Pitagora 170-178

**Cohen E. G.**, 1999, Organizzare i gruppi cooperativi, Erickson, Trento

**Comoglio M., Cardoso M. A.**, 2000, Insegnamento e apprendimento in gruppo: il cooperative learning, LAS, Roma

**Pesci A.**, 2003, Insegnanti di matematica e studenti: come migliorare il lato umano delle loro relazioni?, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, Vol. 26B n. 4, 521-545

**Polito M.**, 2000, Attivare le risorse del gruppo classe, Erickson, Trento  
**Johnson D., W., Johnson R. T., Holubec E. J.**, 1996, Apprendimento cooperativo in classe, Erickson, Trento

Per quanto riguarda l'aspetto disciplinare:

**G. Prodi, N. Tani**, Scoprire la matematica, Introduzione all'algebra, Ghisetti e Corvi ed., Milano, 2003

**G. Prodi, D. Foà**, Scoprire la matematica, Il metodo delle coordinate, Ghisetti e Corvi ed., Milano, 2003

**Gallo E.** (a cura di), *La Matematica attraverso attività, teoria, esercizi*, Sei ed., vol.2, Torino, 1994

**Bazzini L.**, Equazioni e disequazioni: riflessioni sul concetto di equivalenza, in *“La Didattica dell'Algebra nella scuola secondaria superiore, atti del V Convegno Internuclei per la scuola secondaria superiore, Pavia, 16-18 marzo 1995*, ISDAF srl

**M. Bovio, M. Reggiani, N. Vercesi**, Problemi didattici relativi alle equazioni di primo grado nel biennio delle superiori, in *“L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate”*, vol. 18B - n.1- febbraio 1995