

PROVA SCRITTA ANALISI I - MODULO A

Esercizio 1. Determinare l'insieme di definizione della seguente funzione (5 punti):

$$f(x) = \sqrt{\log_{1/3} \left(\arctan \frac{x-2}{x-\pi} \right)}$$

Esercizio 2. Calcolare i seguenti limiti (3 punti ciascuno)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log \left(\frac{1 + \sin x}{1 - x} \right)^{1/4x} \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x(1 - \cos x)}$$

Esercizio 3. Dimostrare la validità della seguente affermazione

$$\text{Esiste } N \text{ tale che } 3^n n! \leq n^n \leq 4^n n! \quad n \geq N$$

(5 punti)

Esercizio 4. Determinare massimi e minimi relativi e assoluti della funzione

$$f(x) = |x^2 - 1| + |x - 2|$$

nell'intervallo $[-2, 3]$ (5 punti).

Esercizio 5. Trovare le radici complesse dell'equazione

$$z^4 - z^3 + z - 1 = 0.$$

(4 punti)

Esercizio 6. Studiare la convergenza della successione definita per ricorrenza

$$a_0 = a \quad a_{n+1} = a_n^2$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$ (5 punti)?

Esercizio 7. Calcolare i limiti delle seguenti successioni

$$a_n = \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^n \quad a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + \sin a_n}{2}$$