PROVA SCRITTA ANALISI II

Esercizio 1. Data la funzione $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{|x|^\alpha + |y|^\beta} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

con α, $\beta > 0$, si chiede di dimostrare che:

- f è continua se e solo se $\alpha, \beta \in (0,2)$;
- f è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha, \beta \in (0,1)$.

Esercizio 2. Data la funzione

$$f(x,y) = x^2 \log(1+y) + x^2 y^2,$$

si chiede:

- di determinare il dominio D di f e di studiare il segno di f in D;
- di determinare i punti critici di f e studiarne la natura.

Esercizio 3. Calcolare

$$\iint_T (y^2 - x^2) e^{(x+y)}\, dx\, dy,$$

dove $T = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; |y| \leq x \leq 2 - |y| \,\}$.

Data: 11 febbraio 2005.