PROVA SCRITTA ANALISI II

Esercizio 1. Data la funzione $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+y)\sin(|x|+|y|)^\alpha}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

si chiede di:

- studiare la continuità di f al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
- calcolare, quando esistono, le derivate direzionali di f in $(0,0)$;
- studiare la differenziabilità di f al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2. Data la curva γ di equazione polare $\rho(\theta) = \cos\theta$, $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, si chiede di:

- studiare la regolarità di γ;
- disegnare il sostegno di γ e provare che è simmetrica rispetto all'asse delle x;
- calcolare
$$\iint_D (1 + x + y^2)\, dx\, dy,$$
dove D è il dominio delimitato da γ e dall'asse delle y.

Esercizio 3. Calcolare il flusso del campo

$$F(x,y,z) = (x, 2y, 3z)$$

uscente dalla frontiera del cubo di vertici $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$.

Data: 1 marzo 2005.