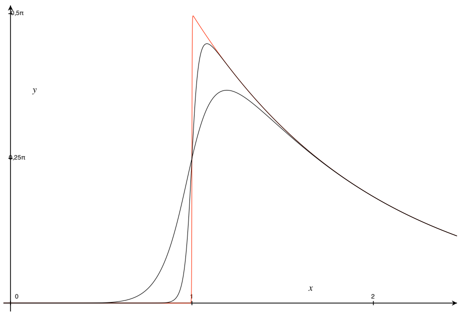
PROVA SCRITTA ANALISI II

Esercizio 1. Discutere la convergenza puntuale e la convergenza uniforme in $(0,+\infty)$ e in $(1,+\infty)$ della successione di funzioni

$$f_n(x) = e^{1-x} \arctan x^n$$

(12 punti).

Soluzione. Per avere un'idea delle funzioni f_n si veda questo grafico



Per le note proprietà dei limiti delle funzioni elementari ($x^n \to +\infty$ al tendere di n a $+\infty$ se $x > 1$, $x^n \to 0$ al tendere di n a $+\infty$ se $0 < x < 1$, $\lim_{y\to+\infty} \arctan y = \pi/2$) si ha che la successione converge per ogni $x \in (0,+\infty)$, e precisamente

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (0,1) \\ \frac{\pi}{4} & x = 1 \\ \frac{\pi}{2}e^{1-x} & x > 1 \end{cases}$$

Poiché le funzioni f_n sono continue in $(0,+\infty)$ e la funzione limite $f(x)$ presenta una discontinuità in $x = 1$, la convergenza non può essere uniforme in qualunque intervallo contenente $x = 1$. In particolare non vi è convergenza uniforme in $(0,+\infty)$.

Anche in $(1,+\infty)$ non vi è convergenza uniforme. Per dimostrarlo è possibile utilizzare il teorema sull'inversione dei limiti, che dice che se f_n converge uniformemente a f nell'insieme I e se esiste, per ogni n, il limite $\lim_{x\to x_0} f_n(x)$ allora esistono e sono uguali i limiti

$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{x\to x_0} \lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

Usando questo teorema troviamo una contraddizione. Infatti se ci fosse convergenza uniforme in $(1,+\infty)$, avremmo che

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to 1+} e^{1-x} \arctan x^n = \lim_{x\to 1+} \frac{\pi}{2} e^{1-x} = \frac{\pi}{2}$$

Data: 25 febbraio 2009.

Il fatto che non vi sia convergenza uniforme in $(1, +\infty)$ si può anche dimostrare direttamente, osservando che

$$\sup_{x\in(1,+\infty)} |f(x) - f_n(x)| = \sup_{x\in(1,+\infty)} \left| e^{1-x}\frac{\pi}{2} - e^{1-x} \arctan x^n \right| = \sup_{x\in(1,+\infty)} e^{1-x} \left| \frac{\pi}{2} - \arctan x^n \right|$$

Per ogni fissato n scegliamo $a_n \in (1, +\infty)$ tale che $a_n^n = \sqrt{3}$, cioè $a_n = 3^{1/2n}$ (si noti che $a_n \to 1$ e che $1 < a_n \leq \sqrt{3}$) abbiamo che $\arctan a^n = \arctan \sqrt{3} = \pi/3$. Allora

$$\sup_{x\in(1,+\infty)} |f(x) - f_n(x)| \geq e^{1-a_n} \left| \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \right| \geq e^{1-\sqrt{3}} \frac{\pi}{6} > 0$$

e subito segue che non vi può essere convergenza uniforme. È anche chiaro che questa stessa dimostrazione mostra che non vi può essere convergenza uniforme in $(0, +\infty)$, poiché

$$\sup_{x\in(0,+\infty)} |f(x) - f_n(x)| \geq \sup_{x\in(1,+\infty)} |f(x) - f_n(x)| .$$

Esercizio 2. Discutere continuità, derivabilità e differenziabilità nell'origine, al variare di $\alpha > 0$, della funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x(\sin(x^\alpha + y^{2\alpha}))}{|x|^{3/2} + |y|^{3/2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(12 punti)

Soluzione. Innanzi tutto la funzione non è ben definita: x^α ha senso – per un α generico – solo se $x > 0$.

Supporremo quindi che la funzione sia definita, per $(x, y) \neq 0$ da

$$\frac{x(\sin(|x|^\alpha + y^{2\alpha}))}{|x|^{3/2} + |y|^{3/2}}.$$

Per quanto riguarda il termine $y^{2\alpha}$ lo riterremo uguale a $|y|^{2\alpha}$ (e quindi se $\alpha = 3/2$ $y^{2\alpha} = |y|^3$ e non $y^{2\alpha} = y^3$).

Ricordiamo che

- poiché stiamo studiando il limite per $x^2 + y^2 \to 0$, possiamo sempre supporre che $|x|$ e $|y|$ sono sufficientemente piccoli;
- da $\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$ segue che per $|\sin z| \leq (1 + \delta) |z|$ per $|z|$ abbastanza piccolo (useremo questa diseguaglianza con $\delta = 1/2$);
- $y^{2\alpha} \leq y^\alpha$ (come abbiamo osservato possiamo supporre $y < 1$);
- per ogni $\beta > 0$ esistono due costanti m ed M positive tali che $m(|x|^\beta + |y|^\beta) \leq (x^2 + y^2)^{\beta/2} \leq M(|x|^\beta + |y|^\beta)$;
- $|x|^\beta \leq (|x|^2)^{\beta/2} \leq (|x|^2 + y^2)^{\beta/2}$

Iniziamo a vedere per quali $\alpha > 0$ sono continue le restrizioni di $f(x, y)$ lungo gli assi coordinati. Se la funzione è continua, saranno continue anche le sue restrizioni. Quindi la funzione non sarà continua per gli α per cui non sono continue le restrizioni. Poichè

$$\lim_{x\to 0+} f(x, 0) = \lim_{x\to 0+} \frac{x \sin(x^\alpha)}{x^{3/2}} = \lim_{x\to 0+} x^{1+\alpha-3/2} \frac{\sin(x^\alpha)}{x^\alpha}$$

si ha che il limite è 0 solo se $1+\alpha-3/2>0$, cioè se $\alpha>1/2$. Quindi la funzione sarà sicuramente discontinua per $\alpha\le 1/2$. Si noti anche che $f(0,y)=0$ per ogni y. Mostriamo ora che la funzione è effettivamente continua per $\alpha>1/2$.

$$\begin{aligned}\left|\frac{x(\sin(|x|^\alpha+y^{2\alpha}))}{|x|^{3/2}+|y|^{3/2}}\right| &\le \frac{3M}{2}\frac{|x|\,(|x|^\alpha+|y|^{2\alpha})}{(x^2+y^2)^{3/4}}\\ &\le \frac{3M}{2}\frac{(x^2+y^2)^{1/2}(|x|^\alpha+|y|^\alpha)}{(x^2+y^2)^{3/4}}\\ &\le \frac{3M}{2}\frac{(x^2+y^2)^{1/2}(x^2+y^2)^{\alpha/2}}{(x^2+y^2)^{3/4}}\\ &= \frac{3M}{2}(x^2+y^2)^{(\alpha-1)/2}\end{aligned}$$

che tende a zero se $\alpha>1$. Ne segue la continuità di f nell'origine per tutti gli $\alpha>1/2$.

Per quanto riguarda la derivabilità, la derivata parziale rispetto a x in $(0,0)$ è data dal limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin(|x|^\alpha)}{x\,|x|^{3/2}}=\lim_{x\to 0}|x|^{\alpha-3/2}\frac{\sin(|x|^\alpha)}{|x|^\alpha}$$

che esiste finito se $\alpha\ge 3/2$. Tale derivata parziale è nulla per $\alpha>3/2$ ed è uguale a 1 per $\alpha=3/2$. La derivata parziale rispetto a y in $(0,0)$ è data dal limite

$$\lim_{y\to 0+}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$$

per tutti gli $\alpha>0$.

Infine la differenziabilità per f. Osserviamo innanzi tutto che f può essere differenziabile solo per $\alpha>3/2$ (per essere differenziabile deve essere derivabile). Per verificare la differenziabilità utilizziamo la definizione e verifichiamo per quali $\alpha>3/2$ (discuteremo poi il caso $\alpha=3/2$) abbiamo che

$$\lim_{(x,y)\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

Poichè $f(0,0)=f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$ per tutti gli $\alpha>3/2$, tale limite si può calcolare utilizzando le stime sopra trovate:

$$\lim_{(x,y)\to 0}\left|\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\le \lim_{(x,y)\to 0}\frac{3M}{2}\frac{(x^2+y^2)^{(\alpha-1)/2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

se $\alpha>3/2$.

Vediamo ora che succede se $\alpha=3/2$.

$$\begin{aligned}&\lim_{(x,y)\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ &\quad=\lim_{(x,y)\to 0}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\frac{(\sin(|x|^{3/2}+|y|^3))}{|x|^{3/2}+|y|^{3/2}}-1\right)\end{aligned}$$

Questo limite non è nullo. Se lo fosse, dovrebbe essere nullo anche il limite

$$\lim_{t\to 0+} \frac{t}{\sqrt{t^2+t^2}} \left(\frac{(\sin(|t|^{3/2}+|t|^3))}{|t|^{3/2}+|t|^{3/2}} - 1 \right) = \lim_{t\to 0+} \frac{t}{\sqrt{2}t} \left(\frac{(\sin(t^{3/2}+t^3))}{2t^{3/2}} - 1 \right) = \frac{-1}{2\sqrt{2}}$$

Esercizio 3. Calcolare il volume della regione che si ottiene intersecando i due cilindri $x^2+z^2 \le 1$ e $y^2+z^2 \le 1$. (12 punti)

Soluzione. Il metodo più semplice è quello di osservare che, per ogni z fissato in $[-1,1]$, x e y devono soddisfare $|x| \le \sqrt{1-z^2}$, $|y| \le \sqrt{1-z^2}$ e cioè stare nel quadrato di lato $2\sqrt{1-z^2}$ (e quindi le sezione del nostro solido a z fissato sono tutte dei quadrati). Allora

$$V = \big\{ (x,y,z) \bigm| -1 \le z \le 1, \\ -\sqrt{1-z^2} \le x \le \sqrt{1-z^2},\ -\sqrt{1-z^2} \le y \le \sqrt{1-z^2} \big\},$$

per cui

$$\iiint_V dx\,dy\,dz = \int_{-1}^{1} dz \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} dx \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} dy = 4\int_{-1}^{1} (1-z^2)\,dz = \frac{16}{3}$$

Se invece di fissare prima la z fissiamo prima la $x \in [-1,1]$ abbiamo due possibilità: vedere prima a che insieme deve appartenere la y (fissato x) e poi a che insieme deve appartenere la z (fissate x e y) oppure vedere prima a che insieme deve appartenere la z (fissato x) e poi a che insieme deve appartenere la y (fissate x e z).

Se seguiamo la prima strada abbiamo che per ogni $x \in [-1,1]$ y può variare in $[-1,1]$. Fissati x e y in $[-1,1]\times[-1,1]$, z deve soddisfare sia $z^2 \le 1-x^2$ che $z^2 \le 1-y^2$, e quindi deve essere $|z| \le \min\{\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-y^2}\} = \beta(x,y)$. Quindi

$$V = \big\{ (x,y,z) \bigm| -1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1,\ -\beta(x,y) \le z \le \beta(x,y) \big\},$$

e

$$\iiint_V dx\,dy\,dz = \int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{1} dy \int_{-\beta(x,y)}^{\beta(x,y)} dz = 2\int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{1} \beta(x,y)\,dy$$

Poiché β è pari in x e y, abbiamo che

$$\iiint_V dx\,dy\,dz = 2\int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{1} \beta(x,y)\,dy = 8\int_{0}^{1} dx \int_{0}^{1} \beta(x,y)\,dy \\ = 8\int_{0}^{1} dx \int_{0}^{x} \beta(x,y)\,dy + 8\int_{0}^{1} dx \int_{x}^{1} \beta(x,y)\,dy$$

Nel primo degli integrali nell'ultimo membro a destra $y < x$, mentre nel secondo $y > x$. Ne deduciamo che

$$\begin{aligned}
\iiint_V dx\,dy\,dz &= 8\int_0^1 dx \int_0^x \sqrt{1-x^2}\,dy + 8\int_0^1 dx \int_x^1 \sqrt{1-y^2}\,dy \\
&= 8\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx + 8\int_0^1 dx \int_x^1 \sqrt{1-y^2}\,dy \\
&= -\frac{8}{3}(1-x^2)^{3/2}\Big|_0^1 + 8\int_0^1 \frac{1}{2}\Big[\arcsin y + y\sqrt{1-y^2}\Big]_x^1\,dx \\
&= \frac{8}{3} + 4\int_0^1 (\frac{\pi}{2} - \arcsin x - x\sqrt{1-x^2})\,dx \\
&= \frac{8}{3} + 2\pi + 4\Big[-x\arcsin x - \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}\Big]_0^1 \\
&= \frac{8}{3} + 2\pi + 4\big(\frac{\pi}{2} + 1 + \frac{1}{3}\big) = \frac{16}{3}
\end{aligned}$$

L'ultimo metodo con cui calcoliamo l'integrale è fissando prima la $x \in [-1,1]$, poi la z e infine la y. In tal caso, per ogni fissato $x \in [-1,1]$, z può variare in $[-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}]$. Fissato x e z abbiamo che y può variare in $[-\sqrt{1-z^2}, \sqrt{1-z^2}]$. Quindi

$$\begin{aligned}
V = \big\{\, (x,y,z) \bigm| &-1 \le x \le 1, \\
&-\sqrt{1-x^2} \le z \le \sqrt{1-x^2},\ -\sqrt{1-z^2} \le y \le \sqrt{1-z^2}\,\big\},
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\iiint_V dx\,dy\,dz &= \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dz \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \\
&= 2\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-z^2}\,dz \\
&= 2\int_{-1}^1 \frac{1}{2}\Big[\arcsin z + z\sqrt{1-z^2}\Big]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\
&= 2\int_{-1}^1 \big[\arcsin\sqrt{1-x^2} + |x|\sqrt{1-x^2}\big]\,dx \\
&= 4\int_0^1 \big[\arccos x + x\sqrt{1-x^2}\big]\,dx \\
&= 4\Big[x\arccos x - \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}\Big]_0^1 \\
&= 4(1+\frac{1}{3}) = \frac{16}{3}
\end{aligned}$$

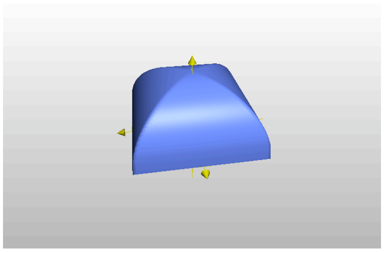
In quest'ultimo caso si sarebbe anche potuto passare a coordinate cilindriche $x = \rho\cos\theta$, $z = \rho\sin\theta$, $y = y$ e ottenere

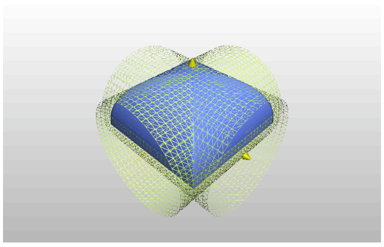
$$\begin{aligned}
V = \big\{\, (\rho,\theta,y) \bigm| &0 \le \rho \le 1, \\
&0 \le \theta \le 2\pi,\ -\sqrt{1-\rho^2\sin^2\theta} \le y \le \sqrt{1-\rho^2\sin^2\theta}\,\big\},
\end{aligned}$$

da cui

$$
\begin{aligned}
\iiint_V dx\,dy\,dz &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho\,d\rho \int_{-\sqrt{1-\rho^2\sin^2\theta}}^{\sqrt{1-\rho^2\sin^2\theta}} dy \\
&= 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho\sqrt{1-\rho^2\sin^2\theta}\,d\rho \\
&= -\frac{2}{3}\int_0^{2\pi} \Big[\frac{(1-\rho^2\sin^2\theta)^{3/2}}{\sin^2\theta}\Big]_{\rho=0}^{\rho=1} d\theta \\
&= -\frac{2}{3}\int_0^{2\pi} \Big[\frac{(1-\sin^2\theta)^{3/2}}{\sin^2\theta} - \frac{1}{\sin^2\theta}\Big] d\theta \\
&= -\frac{2}{3}\int_0^{2\pi} \Big[\frac{|\cos\theta|^3-1}{\sin^2\theta}\Big] d\theta \\
&= \frac{4}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Big[\frac{1-\cos^3\theta}{\sin^2\theta}\Big] d\theta = \frac{8}{3}\int_0^{\pi/2} \Big[\frac{1-\cos^3\theta}{\sin^2\theta}\Big] d\theta \\
&= \frac{8}{3}\Big[-\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{1}{\sin\theta} + \sin\theta\Big]_0^{\pi/2} = \frac{16}{3}
\end{aligned}
$$

Una rappresentazione del solido è riportata nelle figure seguenti





Esercizio 4. (solo per il vecchio ordinamento) Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$
\begin{cases} x(1+y^2)y' = 3 \\ y(1) = 0 \end{cases}
$$