Spazi metrici

Esercizio 1. Si dimostri che la funzione $x = (x_1, x_2) \mapsto \rho(x) = \left(|x_1|^{1/2} + |x_2|^{1/2}\right)^2$ non è una norma in $\mathbb{R}^2$, ma che la funzione $\mathrm{d}(x, y) = \rho(x-y)$ definisce una distanza in $\mathbb{R}^2$.

Sia $c_0 = \{\, x \text{ è una successione in } \mathbb{R} \mid x_n \to 0 \,\}$. Si osservi che $c_0 = \{\, f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid f \text{ è continua} \,\}$. Si dimostri che, con la norma $\|x\| = \sup_n |x_n|$, c_0 è uno spazio di Banach. Si consideri poi la funzione $\mathsf{T}\colon c_0 \to c_0$ definita da $\mathsf{T}(x) = (\theta x_2, \theta x_3, \theta x_4, \dots)$. Dopo aver mostrato che tale applicazione è ben definita (cioè manda c_0 in c_0), si trovino i punti fissi di tale applicazione al variare di $\theta \in \mathbb{R}$. Per quali θ l'applicazione è una contrazione?

Limiti e continuità per funzioni di più variabili

Esercizio 2. Si determini (e si rappresentino nel piano o nello spazio), per le funzioni seguenti, gli insiemi di definizione, gli insiemi in cui sono continue, i limiti al bordo dell'insieme di definizione.

$$f(x,y) = \arcsin(xy) \qquad f(x,y) = \arctan\left(\frac{x}{x^2 - y}\right)$$

$$f(x,y) = \frac{1}{\log(xe^y + 1)} \qquad f(x,y) = \sqrt{\log_{1/2}(1 - x^2 - y^2)}$$

$$f(x,y) = \frac{xy^2 + yx^2}{x^2 + y^2} \qquad f(x,y,z) = \log \arcsin(x^2 + y^2 - z)$$

Derivate parziali, differenziabilità e derivate direzionali

Esercizio 3. Calcolare il gradiente delle funzioni dell'esercizio 2, determinare l'insieme dove tali funzioni sono differenziabili e calcolarne le derivate direzionali nei punti x secondo la direzione individuata dal vettore v se x e v sono rispettivamente

$$x = (1/2, 1) \quad v = (1,1) \qquad x = (1,2) \quad v = (1,2)$$

$$x = (0,1) \quad v = (2,1) \qquad x = (0,0) \quad v = (-1,-1)$$

$$x = (1,1) \quad v = (1,-1) \qquad x = (1,0,1/2) \quad v = (1,1,0)$$

Esercizio 4. Disegnare nel piano il campo gradiente delle funzioni

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \qquad f(x,y) = x^2 - y^2$$

$$f(x,y) = \arctan\frac{x}{y} \qquad f(x,y) = \frac{1}{x^4 + y^4}$$

Massimi, minimi e punti stazionari

Esercizio 5. Per le funzioni dell'esercizio 2 cercare di determinare massimi e minimimi relativi e assoluti.

Esercizio 6. Determinare i punti critici delle seguenti funzioni e stabilirne la natura studiando la matrice hessiana.

$$f(x,y,z,w) = x^2 + xy + 2xz + 3y^2 + yw - zw + w^2$$

$$f(x,y) = \arctan(x^2 + xy^2 + y)$$

$$f(x,y) = \frac{2x + x^2 + y^2}{1 + 2x^2}$$

$$f(x,y) = 1 - x^4 + 3\sqrt{x^2 + 3y^2}$$