

PROVA SCRITTA ANALISI II - MODULO A

Esercizio 1. Si consideri la funzione

$$f(x, y) = \log \frac{(x + 2y)(1 + x - 2y)}{x}.$$

Di tale funzione si determini l'insieme di definizione (e lo si rappresenti nel piano cartesiano) e il comportamento al bordo dell'insieme di definizione. Si studino poi massimi, minimi e punti stazionari della funzione

$$g(x, y) = \frac{(x + 2y)(1 + x - 2y)}{x}.$$

(5 + 5 punti)

Esercizio 2. Vi sono relazioni fra i punti critici di f e quelli di g ? (4 punti)

Esercizio 3. Si consideri la funzione

$$f(x, y) = \int_0^x \sin(t^2 + y^2) dt.$$

Di tale funzione si determini almeno un punto stazionario e si cerchi di stabilire se si tratta di un minimo, un massimo o un punto di sella. (8 punti)

Esercizio 4. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$2y'' + 2y' + y = e^{-x/2} \sin x$$

(6 punti)

Esercizio 5. Dopo aver verificato l'applicabilità del teorema di esistenza e unicità per il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' \cos x = (y - y^2) \sin x \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, si calcolino esplicitamente le soluzioni corrispondenti ad $\alpha = -1, 1$. (8 punti)