

**PROVA SCRITTA ANALISI II - MODULO A**

**Esercizio 1.** Si consideri la funzione

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{x^2 y + y^2 z + z^2 x}{x^2 + y^2 + z^2} & (x, y, z) \neq (0, 0, 0), \\ 0 & (x, y, z) = (0, 0, 0). \end{cases}$$

Se ne determini il dominio, l'insieme di continuità e l'insieme di differenziabilità e le direzioni in lungo le quali esiste la derivata direzionale in  $(0, 0, 0)$ . (10 punti)

**Esercizio 2.** Si consideri la funzione  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x, y) = a(x^2 + y^2 - 2x) + xy.$$

Determinare tutti i punti di possibile massimo e minimo relativo per  $f$  e stabilire, al variare di  $a$ , se tali punti risultano effettivamente di massimo o di minimo relativo. (10 punti)

**Esercizio 3.** Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} (1-x)y'(x) = y(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Determinare esplicitamente la soluzione  $y(x)$ . Posto  $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  determinare una legge di ricorrenza per i coefficienti  $a_n$  in corrispondenza della quale  $y$  sia soluzione del problema dato. (8 punti)