PROVA SCRITTA FONDAMENTI DI ANALISI MATEMATICA 1

Esercizio 1. Mostrare che $\mathcal{T} = \{ [0,\alpha) \mid \alpha \in [0,1] \}$ è una topologia in $[0,1)$ e si denoti con X il corrispondente spazio topologico. Di quali proprietà gode questa topologia? Quali sono gli insiemi compatti di X? Quali i connessi?

Indicato con Y l'intervallo $[0,1)$ con l'ususale topologia, la funzione identica da X in Y è continua? E quella da Y in X?

Esercizio 2. Sia

$$f_p(x) = \frac{\arctan x}{\log^p(x+1)}$$

Per quali $p > 0$ abbiamo che $f_p \in L^2(0,1)$?

Più in generale dire, per $p > 0$, per quali $q \in (0,+\infty]$ abbiamo che $f_p \in L^q(0,1)$.

Esercizio 3. Si calcolino i coefficienti di Fourier rispetto al sistema $\{ 1, \cos nx, \sin nx \mid n = 1,2,\dots \}$ ortonormale in $L^2(-\pi,\pi)$ della funzione

$$f(x) = (x^2 - \pi^2)^2$$

La corrispondente serie di Fourier converge uniformemente alla funzione f?

Data: 30 Gennaio 2008.