PROVA SCRITTA FONDAMENTI DI ANALISI MATEMATICA 1

Esercizio 1. Sia X un insieme sia $x_0 \in X$ un suo elemento. Sia $\mathcal{T}$ la famiglia di sottoinsiemi di X formata dall'insieme vuoto e da tutti i sottoinsiemi $A \subset X$ tali che $x_0 \in A$.

(1) Si dimostri che $(X, \mathcal{T})$ è uno spazio topologico.
(2) Si dimostri che $(X, \mathcal{T})$ è conesso.
(3) $(X, \mathcal{T})$ è di Hausdorf?
(4) Dimostrare che gli unici insiemi compatti in $(X, \mathcal{T})$ sono gli insiemi finiti.

Esercizio 2. Sia

$$f_p(x) = \frac{\sin x}{x^p}$$

Per quali $p > 0$ abbiamo che $f_p \in L^2(1, +\infty)$? E in $L^2(0, +\infty)$?

Esercizio 3. Si calcolino i coefficienti di Fourier della funzione

$$f(x) = \begin{cases} a & x \in [-\pi, 0] \\ b & x \in [0, \pi] \end{cases}$$

in $L^2(-\pi, \pi)$ rispetto al sistema ortonormale

$$\Big\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \;\Big|\; n = 1, 2, \dots \Big\}$$

Cosa si può dire sulla convergenza della serie di Fourier nei punti 0, ± 1?

Data: 28 Febbraio 2008.