PROVA SCRITTA FONDAMENTI DI ANALISI MATEMATICA 1

Esercizio 1. Si consideri l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$. Siano $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ due famiglie di sottoinsiemi di N cosi' definite:

$$\mathcal{T}_1 := \left\{ U \subset \mathbb{N} \;\middle|\; \mathbb{N} \setminus U \text{ è finito } \right\} \cup \{0\}$$

$$\mathcal{T}_2 := \left\{ U \subset \mathbb{N} \;\middle|\; \mathbb{N} \setminus U \text{ è finito } \right\} \cup \left\{ U \subset \mathbb{N} \;\middle|\; 1 \notin U \right\}$$

(1) Dimostrare che $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ sono topologie su $\mathbb{N}$.
(2) Si determini la chiusura dell'insieme dei numeri pari in $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_1)$ ed in $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_2)$.

Sia f l'identità $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e g la funzione $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da: $g(n) = 1$ se n è dispari, $g(n) = 1 + n/2$ se n è pari.

(3) Dire se f e g sono continue come mappe $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_1) \to (\mathbb{N}, \mathcal{T}_2)$.
(4) Dire se f e g sono continue come mappe $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_2) \to (\mathbb{N}, \mathcal{T}_1)$.

Esercizio 2. Esibire una funzione $f \in L^1(\mathbb{R})$ tale che $f \notin L^2(\mathbb{R})$ e una funzione $g \in L^2(\mathbb{R})$ tale che $g \notin L^1(\mathbb{R})$.

Esibire una funzione $f \in L^2([0,1])$ tale che $f \notin L^p([0,1])$ per ogni $p > 2$.

Esercizio 3. Si mostri che le funzioni

$$\{1, \cos 2\pi nx, \sin 2\pi nx\}_{n\in\mathbb{N}}$$

sono un insieme ortogonale in $L^2([1,2])$. Dopo averle normalizzate, si calcolino i coefficienti di Fourier della funzione $f(x) = x^2$ rispetto a questo insieme ortonormale.

Data: 26 Marzo 2008.