PROVA SCRITTA FONDAMENTI DI ANALISI MATEMATICA 1

Esercizio 1. Per ogni x, $y \in \mathbb{R}$ si ponga: $d(x,y) = \frac{|x-y|}{(1+|x-y|)}$. Dimostrare che $(\mathbb{R}, d)$ è uno spazio metrico. Dimostrare che d è equivalente alla metrica usuale su $\mathbb{R}$. Dimostrare che in $(\mathbb{R}, d)$ esistono insiemi chiusi e limitati che non sono compatti. Confrontare tale risultato con il teorema di Heine-Borel.

Esercizio 2. Sia $1 < p < +\infty$. Si considerino le tre affermazioni:
(1) $u \in L^1(\mathbb{R})$;
(2) $u \in L^p(\mathbb{R})$;
(3) $u \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Dimostrare (o confutare con un controesempio) le affermazioni seguenti:
(a) (1) e (2) implicano (3);
(b) (1) e (3) implicano (2);
(a) (2) e (3) implicano (1);

Esercizio 3. Si consideri $f(x) = |x|$ su $[-1/2, 1/2]$. La si sviluppi in serie di Fourier rispetto al sistema ortogonale $e^{2k\pi ix}$ in $[-1/2, 1/2]$. Se ne deduca il valore della somma della serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$$

Data: 29 maggio 2008.