PROVA SCRITTA FONDAMENTI DI ANALISI MATEMATICA 1

Esercizio 1. Si consideri su $\mathbb{R}$ la topologia usuale $\mathcal{T}$ e la più piccola topologia $\bar{\mathcal{T}}$ che rende continui tutti i polinomi $x \mapsto x^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$ da $(\mathbb{R}, \bar{\mathcal{T}})$ in $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.

Dire se questa topologia è di Hausdorff. Quali sono i compatti? La funzione $x \mapsto \cos x$ da $(\mathbb{R}, \bar{\mathcal{T}})$ in $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ è continua?

Sia $X = [0, +\infty)$. Su X consideriamo la topologia indotta da $\bar{\mathcal{T}}$. La funzione sin, ristretta a X, risulta continua da X a $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$?

Esercizio 2. Sia $1 \leq p < +\infty$. Ricordiamo che

$$\ell^p = \left\{ x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \mid \sum_1^\infty |x_n|^p < +\infty \right\}$$

$$\ell^\infty = \left\{ x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \mid \sup_n |x_n| < +\infty \right\}$$

Si considerino le tre affermazioni:

(1) $x \in \ell^1(\mathbb{N})$;
(2) $x \in \ell^p(\mathbb{N})$, $1 < p < \infty$;
(3) $x \in \ell^\infty(\mathbb{N})$.

Dimostrare (o confutare con un controesempio) le affermazioni seguenti:

(a) (1) implica (3);
(b) (1) e (3) implicano (2);
(a) (3) implica (1);

Esercizio 3. Si costruisca un sistema ortonormale e_n nell'intervallo $[-l, l]$, e si sviluppi $f(x) = e^x$ rispetto a tale sistema ortonormale.

Data: 23 giugno 2008.