PROVA SCRITTA FONDAMENTI DI ANALISI MATEMATICA 1

Esercizio 1. Posto $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \equiv X$, sia $\mathcal{B}$ la famiglia di sottoinsiemi di X formata dall'insieme vuoto e da tutti i sottoinsiemi $A \subset X$ della forma:

$$A := \left\{ (x, y) \in X \;\middle|\; r_1^2 < x^2 + y^2 < r_2^2 \right\},$$

con r_1, $r_2 \in \mathbb{R}$ e $0 \leq r_1 < r_2$.

(1) Si dimostri che $\mathcal{B}$ è una base per una toplogia di X.

(2) Dati gli insiemi A_+, A_- definiti da:

$$A_\pm := \left\{ (x, y) \in X \;\middle|\; \max(|x \pm 2|, |y \pm 2|) < 1 \right\}$$

si dimostri che $A_+ \cup A_-$è connesso. Descrivere gli insiemi connessi.

(3) Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $f \colon X \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + \alpha y^2}$$

è continua.

Esercizio 2. Sia $I_n = [\sin n, \sin \frac{n^2+1}{n}]$ e si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \chi_{I_n}(x)$$

Discutere la convergenza puntuale e in in $L^p[-1, 1]$ (al variare di $p \in [1, +\infty])$ della successione.

Esercizio 3. Si sviluppi in serie di Fourier nell'intervallo $[0, 1]$ la funzione xe^x.

Data: 21 luglio 2008.