PROVA SCRITTA FONDAMENTI DI ANALISI MATEMATICA 1

Esercizio 1. Sia $\mathcal{T}$ il sottoinsime dell'insieme delle parti di $\mathbb{R}$ cosí definito:

$$U \in \mathcal{T} \quad \text{se e solo se} \quad U = \emptyset \text{ oppure } \mathbb{R} \setminus U \text{ è numerabile.}$$

Si chiede di:

- dimostrare che $\mathcal{T}$ è una topologia;
- discutere i connessi e compatti di $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.

Sia $\mathcal{T}_1$ la topologia cofinita (cioè tale che $U \in \mathcal{T}_1$ se e solo se $U = \emptyset$ oppure $\mathbb{R} \setminus U$ è finito); discutere la continuità dell'identità come funzione da $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ a $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$ e come funzione da $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$ a $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.

Esercizio 2. Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = x^{-p} \sin(\frac{x}{n})$$

Discutere la convergenza puntuale e in $L^1(0, +\infty)$ (al variare di $p > 0$) della successione.

Esercizio 3. Si sviluppi in serie di Fourier nell'intervallo $[-1, 1]$ la funzione $x|x|$.

Data: 16 settembre 2008.