PROVA SCRITTA FONDAMENTI DI ANALISI MATEMATICA 1

Esercizio 1. Si dimostri che la funzione $d\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0 + \infty)$ definita da

$$d((a, b), (a', b')) = \max\{|a - a'|, |b - b'|, 1\}$$

è una distanza invariante per traslazioni.

Rappresentare nel piano gli insiemi

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; d(x, (0, 0)) < 1 \right\} \qquad B = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; d(x, (0, 0)) \leq 1 \right\}$$

Si mostri che la topologia indotta da questa metrica è equivalente all'usuale topologia di $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 2. Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{1 - e^{x/n}}{x^p}$$

Discutere la convergenza puntuale, uniforme e in $L^1(0, +\infty)$ (al variare di $p > 0$) della successione f_n.

Esercizio 3. Si sviluppi in serie di Fourier nell'intervallo $[0, 1]$ la funzione $\sin x$.

Data: 13 ottobre 2008.