# PROVA SCRITTA FONDAMENTI DI ANALISI MATEMATICA 1

**Esercizio 1.** Sia $\alpha \in (0, +\infty)$ e si consideri la funzione $d_\alpha \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0 + \infty)$ definita da

$$d_\alpha((a,b),(a',b')) = |a-a'|^\alpha + |b-b'|^\alpha.$$

Per quali $\alpha \in (0,+\infty)$ questa funzione è una distanza in $\mathbb{R}^2$?

Dato $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ si ponga

$$B_x^\alpha(\delta) = \left\{\, y \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; d_\alpha(x,y) < \delta \,\right\}$$

Rappresentare nel piano gli insiemi $B^{1/2}_{(0,0)}(1)$ e $B^1_{(0,0)}(1)$.

Si definisca poi, per ogni $\alpha > 0$, la topologia $\mathcal{T}_\alpha$ decretando che $A$ è aperto in $\mathcal{T}_\alpha$ se per ogni punto $x \in A$ esiste $\delta > 0$ tale che $B_x^\alpha(\delta) \subset A$. Si dimostri che, per ogni $\alpha > 0$, $\mathcal{T}_\alpha$ è l'usuale topologia in $\mathbb{R}^2$.

**Esercizio 2.** Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{1 - e^{-x^2/n}}{x^p}$$

Discutere la convergenza puntuale, uniforme e in $L^1(0,+\infty)$ (al variare di $p > 0$) della successione $f_n$.

**Esercizio 3.** Si sviluppi in serie di Fourier nell'intervallo $[0,\pi]$ la funzione $x \sin x$.

Data: 19 novembre 2008.