PROVA SCRITTA FONDAMENTI DI ANALISI MATEMATICA 1

Esercizio 1. Sia $\alpha \in (0, +\infty)$ e si consideri la funzione $\|\cdot\|_\alpha \colon \mathbb{R}^2 \to [0 + \infty)$ definita da

$$\|(a,b)\|_\alpha = \Big(|a|^\alpha + |b|^\alpha\Big)^{1/\alpha}.$$

Per quali $\alpha \in (0, +\infty)$ questa funzione è una norma in $\mathbb{R}^2$?

Dato $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ si ponga

$$B^\alpha_\delta(x) = \left\{\, y \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \|x - y\|_\alpha < \delta \,\right\}$$

Rappresentare nel piano gli insiemi $B^{1/2}_{(0,0)}(1)$ e $B^{1}_{(0,0)}(1)$.

Si definisca poi, per ogni $\alpha > 0$, la topologia $\mathcal{T}_\alpha$ decretando che A è aperto in $\mathcal{T}_\alpha$ se per ogni punto $x \in A$ esiste $\delta > 0$ tale che $B^\alpha_x(\delta) \subset A$. Si dimostri che, per ogni $\alpha > 0$, $\mathcal{T}_\alpha$ è l'usuale topologia in $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 2. Discutere la convergenza puntuale, uniforme e in $L^p(0, +\infty)$ (al variare di $p \in [1, +\infty]$) della serie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x} \chi_{[n,+\infty]}(x).$$

Calcolare infine l'integrale

$$\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$$

Esercizio 3. Si sviluppi in serie di Fourier nell'intervallo $[0, \pi]$ la funzione $x(\pi - x)$.

Data: 15 dicembre 2008.