PROVA SCRITTA FONDAMENTI DI ANALISI MATEMATICA 2

Esercizio 1. Si calcolino i coefficienti di Fourier della funzione

$$f(x) = \begin{cases} a & x \in [-\pi, 0] \\ b & x \in [0, \pi] \end{cases}$$

in $L^2(-\pi, \pi)$ rispetto al sistema ortonormale

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \;\middle|\; n = 1, 2, \dots \right\}$$

Cosa si può dire sulla convergenza della serie di Fourier nei punti 0, ± 1?

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^2$, con la solita norma, si consideri il funzionale lineare

$$\Lambda(x, y) = 2x$$

ristretto al sottospazio lineare $E = \{ (x, y) \mid x + y = 0 \}$.

Calcolare la norma di $\Lambda \colon E \to \mathbb{R}$ e trovarne un'estensione che ne conservi la norma.

Calcolare poi la norma di $\Lambda \colon E \to \mathbb{R}$ nel caso in cui in $\mathbb{R}^2$ si consideri la norma $\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|$. In questo caso trovare (almeno) due estensioni che ne conservino la norma.

Esercizio 3. Si consideri lo spazio vettoriale

$$\ell_0 = \{ c_n \in \mathbb{C} \mid \lim_{n \to \infty} c_n = 0 \}.$$

Si mostri che tale spazio vettoriale con la norma

$$\|c\| = \max_n |c_n|$$

diviene uno spazio di Banach.

Data: 28 Febbraio 2008.