PROVA SCRITTA FONDAMENTI DI ANALISI MATEMATICA 2

Esercizio 1. Si mostri che le funzioni

$$\{1, \cos 2\pi nx, \sin 2\pi nx\}_{n\in\mathbb{N}}$$

sono un insieme ortogonale in $L^2([1,2])$. Dopo averle normalizzate, si calcolino i coefficienti di Fourier della funzione $f(x) = x^2$ rispetto a questo insieme ortonormale.

Esercizio 2. Si consideri nello spazio di Hilbert

$$\ell^2 = \left\{ x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \mid \sum x_k^2 < +\infty \right\}$$

l'operatore

$$\ell^2 \ni x \mapsto Tx \in \ell^2, \qquad (Tx)_k = e^{-k} x_k.$$

Si mostri che tale operatore è ben definito, lineare e limitato e se ne calcoli la norma.

Si mostri poi che se $x_n \rightharpoonup 0$ (cioè x_n converge debolmente a 0) allora x_n converge fortemente a zero.

Se ne deduca che tale operatore manda successioni debolmente convergenti in successioni fortemente convergenti.

Data: 26 Marzo 2008.