

**PROVA SCRITTA FONDAMENTI DI ANALISI
MATEMATICA 2**

Esercizio 1. Si consideri $f(x) = |x|$ su $[-1/2, 1/2]$. La si sviluppi in serie di Fourier rispetto al sistema ortogonale $e^{2k\pi ix}$ in $[-1/2, 1/2]$. Se ne deduca il valore della somma della serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$$

Esercizio 2. Consideriamo l'applicazione $\Lambda: L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$ definita da

$$\Lambda(f)(x) = \int_0^1 (x-s)f(s) ds$$

Si dimostri che Λ un operatore lineare ben definito e limitato. Se ne stimi la norma.

Esercizio 3. Calcolare, utilizzando il metodo dei residui, il seguente integrale:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(4x^2+1)^2}$$

Esercizio 4. Sia $f \in C([0, 1])$. Si mostri che l'operatore di moltiplicazione, definito da

$$\mathbb{T}_f(u)(x) = f(x)u(x),$$

è ben definito, lineare e continuo come operatore da $L^2([0, 1])$ in $L^2([0, 1])$. Che si può dire sulla sua inettività e suriettività?