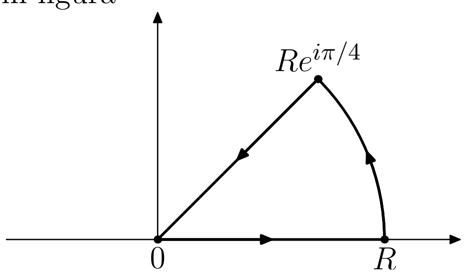
PROVA SCRITTA FONDAMENTI DI ANALISI MATEMATICA 2

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^3$, con la metrica usuale, sia E la retta $x = y = z$; dato l'operatore lineare $\ell\colon E \to \mathbb{R}$ definito da $\ell((1,1,1)) = 2$.

(1) Si calcoli la norma di ℓ.
(2) Si estenda ℓ ad un operatore lineare $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ in modo che $L(v) = 0$ per ogni $v \in E^\perp$. Tale estensione è unica?
(3) Calcolare la norma di L.

Esercizio 2. Calcolare l'integrale improprio $\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx$ utilizzando il metodo dei residui. Suggerimento: si integri la funzione $f(z) = e^{-z^2}$ lungo il cammino in figura



Esercizio 3. Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ diversa da zero in un insieme di misura non nulla. Si dimostri che esiste una costante $c > 0$ tale che la funzione massimale

$$Mf(x) = \sup_{0<r<+\infty} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x)} |f|\,dm \geq \frac{c}{|x|^n} \qquad \text{per ogni } |x| \geq 1.$$

Data: 16 settembre 2008.