

**PROVA SCRITTA FONDAMENTI DI ANALISI
MATEMATICA 2**

Esercizio 1. Si consideri in $E = \{ \lambda \sin x \mid \lambda \in \mathbb{R} \} \subset L^2(0, \pi)$ il funzionale lineare definito da

$$\Lambda(\lambda \sin x) = \lambda.$$

Denotata ancora con Λ l'unica estensione di tale funzionale a tutto $L^2(0, \pi)$, si trovi un'espressione esplicita di tale operatore, la sua norma e la norma della sua restrizione a $L^\infty(0, \pi)$ (dove in L^∞ si considera la norma usuale dell'estremo superiore essenziale).

Esercizio 2. Mostrare che l'operatore definito da

$$(\mathbb{T}x)_1 = 0, \quad (\mathbb{T}x)_n = x_{n-1} \quad \text{per ogni } x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$$

è lineare, ben definito e limitato da $\ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N})$.

Si discuta l'iniettività e la suriettività di tale operatore e se ne calcoli la norma.

Esercizio 3. Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_C f(z) dz$$

ove f è la funzione

$$f(z) = \frac{z}{16z^4 + 1}$$

e C la circonferenza di centro $z_0 = 0$ e raggio $R = 2$.