

# Serie di Fourier

## 6.1. Introduzione

Un polinomio trigonometrico di grado  $N$  nell'intervallo  $[-\pi, \pi]$  è una funzione  $g(x)$ , periodica di periodo  $2\pi$ , della forma

$$g(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}$$

per una qualche scelta delle costanti  $c_n \in \mathbb{C}$ . Ovviamente, ogni polinomio trigonometrico di grado  $n$  può anche essere messo nella forma

$$g(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Osserviamo anche che se  $g(x) \in \mathbb{R}$  per ogni  $x$ , allora, per ogni  $n$ ,  $c_n = \bar{c}_{-n}$  e  $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ . Analogamente si considerano i polinomi trigonometrici nell'intervallo compatto  $[a, b]$ : sono le funzioni  $b - a$  periodiche della forma

$$g(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{i \frac{2\pi n}{b-a} x}.$$

Poiché le funzioni

$$u_n(x) = \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

sono un sistema di funzioni ortonormali nello spazio di Hilbert  $L^2([-\pi, \pi])$ , segue immediatamente dalla teoria degli spazi di Hilbert che, per ogni funzione  $f \in L^2([-\pi, \pi])$ , posto

$$(6.1.1) \quad \hat{f}_n = \langle f, u_n \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{u_n(x)} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx,$$

si ha

$$(6.1.2) \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}_n|^2 \leq \|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$$

Sempre dai risultati generali sugli spazi di Hilbert segue che, comunque assegnata una successione  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  di numeri complessi tali che

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 < +\infty,$$

e posto

$$P_N(x) = \sum_{n=-N}^N c_n u_n(x),$$

esiste una funzione  $f \in L^2([-\pi, \pi])$  tale che

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|f - P_N\|^2 = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - P_N(x)|^2 dx \rightarrow 0.$$

Infine scriveremo, per qualunque funzione  $f \in L^1([-\pi, \pi])$ ,

$$(6.1.3) \quad f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_n \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$$

$$(6.1.4) \quad S_N(f, x) = \sum_{-N}^N \hat{f}_n \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$$

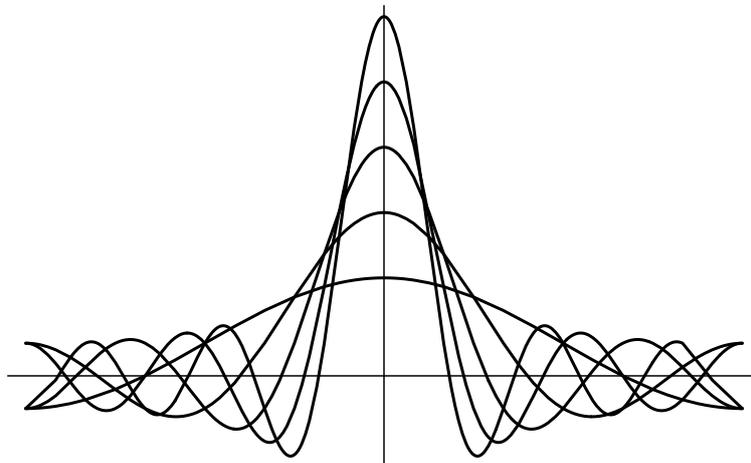
se i coefficienti  $\hat{f}_n$  sono definiti dalla (6.1.1) (si noti che tale definizione ha senso per tali  $f$ ). Si osservi che nulla viene detto, al momento, sulla convergenza della serie (6.1.3).

In questo capitolo vogliamo

- (1) dimostrare che data una qualunque  $f \in L^2([-\pi, \pi])$  vale l'uguaglianza nella (6.1.2), e pertanto il sistema ortonormale  $u_n$  è massimale. Segue allora, sempre dalla teoria generale degli spazi di Hilbert, che

$$(6.1.5) \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |S_N(f, x) - f(x)|^2 dx = 0.$$

Ricordiamo che la convergenza in norma  $L^2$  non implica la convergenza puntuale, ma solo la convergenza puntuale quasi ovunque



**Figura 1.** I nuclei di Dirichlet  $D_1, \dots, D_5$

lungo una sottosuccessione. Possiamo allora dire che dalla validità della (6.1.5) segue l'esistenza di una sottosuccessione  $N_k$  tale che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} S_{N_k}(f, x) = f(x) \quad \text{per quasi ogni } x \in [-\pi, \pi].$$

- (2) indagare sotto quali condizioni  $S_N(f, x) \rightarrow f(x)$  puntualmente ed eventualmente uniformemente.

## 6.2. I nuclei di Dirichlet e di Fejér

Due famiglie di polinomi trigonometrici, che avranno una particolare importanza nel seguito sono il nucleo di Dirichlet (si veda la figura 1)

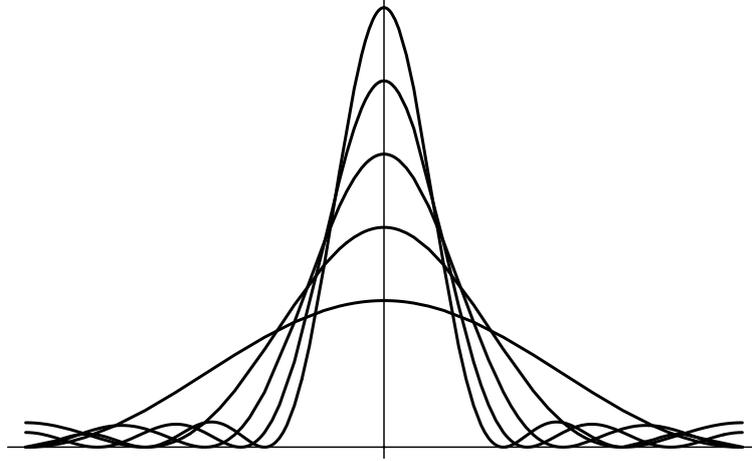
$$(6.2.1) \quad D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx}$$

e il nucleo di Fejér (si veda la figura 2)

$$(6.2.2) \quad K_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(x).$$

Si noti che  $D_n(0) = 2n + 1$ , mentre  $K_n(0) = n + 1$ .

Dimostriamo alcune proprietà del nucleo di Dirichlet e di Fejér, che utilizzeremo nel seguito, quando analizzeremo la convergenza puntuale della serie di Fourier.



**Figura 2.** I nuclei di Fejér  $K_1, \dots, K_5$

**Proposizione 6.2.1.** Per  $n = 0, 1, 2, \dots$  abbiamo

$$(6.2.3) \quad D_n(x) = \frac{\sin(n + 1/2)x}{\sin(x/2)}$$

$$(6.2.4) \quad K_n(x) = \frac{1}{n+1} \frac{1 - \cos(n+1)x}{1 - \cos x} = \frac{1}{n+1} \frac{\sin^2(n/2 + 1/2)x}{\sin^2 x/2}$$

$$(6.2.5) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x) dx = 1.$$

Inoltre  $K_n(x) \geq 0$ , e

$$(6.2.6) \quad K_n(x) \leq \frac{2}{(n+1)(1 - \cos \delta)} \quad \text{per ogni } 0 < \delta \leq |x| \leq \pi$$

**Dimostrazione.** La (6.2.3) segue osservando che

$$\begin{aligned} D_n(x) &= \sum_{k=-n}^n e^{ikx} = e^{-inx} \frac{e^{i(2n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} \\ &= \frac{e^{i(n+1/2)x} - e^{-i(n+1/2)x}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} \\ &= \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{\sin(x/2)}. \end{aligned}$$

Quindi si ricava la (6.2.4)

$$\begin{aligned}
 K_n(x) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(x) \\
 &= \frac{1}{n+1} \frac{e^{ix/2} \sum_{k=0}^n e^{ikx} - e^{-ix/2} \sum_{k=0}^n e^{-ikx}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} \\
 &= \frac{1}{n+1} \frac{e^{ix/2} \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} - e^{-ix/2} \frac{e^{-i(n+1)x} - 1}{e^{-ix} - 1}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} \\
 &= \frac{1}{n+1} \frac{e^{i(n+1)x} - 1 + e^{-i(n+1)x} - 1}{(e^{ix/2} - e^{-ix/2})^2} \\
 &= \frac{1}{n+1} \frac{2 \cos(n+1)x - 2}{2 \cos x - 2}.
 \end{aligned}$$

Per quanto riguarda la (6.2.5), basta osservare che

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) dx = \sum_{k=-n}^n \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} dx = 2\pi,$$

e quindi

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x) dx = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \int_{-\pi}^{\pi} D_k(x) dx = \frac{1}{n+1} (n+1) 2\pi.$$

La non negatività di  $K_n$  segue immediatamente dalla espressione esplicita (6.2.4) del Nucleo di Fejér, da cui discende anche la disuguaglianza (6.2.6).  $\square$

L'importanza del nucleo di Dirichlet segue dal fatto che, per ogni funzione  $f \in L^1([-\pi, \pi])$  (prolungata per periodicità a tutta la retta reale), si ha che

$$\begin{aligned}
 S_n(f, x) &= \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) u_k(x) = \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n \left( \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-iks} ds \right) e^{ikx} \\
 (6.2.7) \quad &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \left( \sum_{k=-n}^n e^{ik(x-s)} \right) ds \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) D_n(x-s) ds \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s+x) D_n(s) ds
 \end{aligned}$$

(nell'ultima uguaglianza abbiamo usato la parità del nucleo di Dirichlet e la periodicità della funzione  $f$ ).

### 6.3. Approssimazione di funzioni mediante polinomi trigonometrici

Per quanto l'insieme dei polinomi trigonometrici possa apparire un sottoinsieme "piccolo" nell'insieme delle funzioni continue e periodiche di periodo  $2\pi$ , ogni funzione continua e periodica di periodo  $2\pi$  può essere approssimata in modo uniforme con polinomi trigonometrici. Infatti vale il seguente teorema:

**Teorema 6.3.1.** *Sia  $f$  una funzione continua e periodica di periodo  $2\pi$ .*

*Poniamo*

$$\Sigma_n(f, x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k(f, x).$$

*Allora le funzioni  $\Sigma_n(f, x)$  sono una successione di polinomi trigonometrici che convergono a  $f$  uniformemente.*

**Dimostrazione.** Osserviamo che dalla (6.2.7) segue che

$$\begin{aligned} \Sigma_n(f, x) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k(f, x) \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s+x) D_n(s) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s+x) \left( \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_n(s) \right) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s+x) K_n(s) ds \end{aligned}$$

Ricordando che  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x) dx = 1$ , abbiamo allora che

$$\begin{aligned} |\Sigma_n(f, x) - f(x)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s+x) K_n(s) ds - f(x) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(s) ds \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(s+x) - f(x)) K_n(s) ds \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} |f(s+x) - f(x)| K_n(s) ds \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |f(s+x) - f(x)| K_n(s) ds \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} |f(s+x) - f(x)| K_n(s) ds \end{aligned}$$

Osserviamo poi che, essendo continua e periodica,  $f$  è uniformemente continua, e quindi esiste  $M \geq 0$  tale che  $|f(x)| \leq M$  per ogni  $x$  e per ogni  $\epsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che  $|f(s+x) - f(x)| < \epsilon$  per ogni  $|s| < \delta$ . Ne segue che

$$\begin{aligned} |\Sigma_n(f, x) - f(x)| &\leq \frac{\epsilon}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} K_n(s) ds + 2M \max_{\delta \leq |x| \leq \pi} K_n(x) \\ &\leq \epsilon + \frac{4M}{(n+1)(1 - \cos \delta)} \end{aligned}$$

e il teorema segue.  $\square$

Un'immediata conseguenza del teorema appena dimostrato è la seguente:

**Corollario 6.3.2.** *Sia  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  un intervallo compatto, e  $\epsilon > 0$ .*

*Allora*

(a) *se  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , è  $(b-a)$ -periodica e continua, esiste un polinomio trigonometrico*

$$P_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik \frac{2\pi}{b-a} x}.$$

*tale che*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - P_n(x)| < \epsilon$$

(b) *se  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione continua, esiste un polinomio  $Q_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$  tale che<sup>1</sup>*

$$|f(x) - Q(x)| < \epsilon \quad \text{per ogni } x \in [a, b]$$

**Dimostrazione.** Sia  $f$  continua,  $(b-a)$ -periodica e  $\epsilon > 0$ . La funzione  $\tilde{f}(s) = f((b-a)s/2\pi)$  è continua e  $2\pi$ -periodica.

<sup>1</sup>Otteniamo così un'altra dimostrazione del Teorema di Weierstrass 9.6.1

Per il teorema 6.3.1, esiste  $n$  tale che  $|\Sigma_n(\tilde{f}, x) - \tilde{f}(x)| < \epsilon$ . Posto  $P_n(x) = \Sigma_n(\tilde{f}, 2\pi x/(b-a))$ , ne deduciamo subito che

$$|P_n(x) - f(x)| = |\Sigma_n(\tilde{f}, 2\pi x/(b-a)) - \tilde{f}(2\pi x/(b-a))| < \epsilon,$$

e la prima parte del corollario segue.

Consideriamo ora una funzione continua in  $[a, b]$ . Riflettendola attorno al punto  $x = a$  (cioè ponendo  $f(a-x) = f(a+x)$  per tutti gli  $x \in [0, b-a]$ ) otteniamo una funzione continua in  $[a - (b-a), b]$  tale che  $f(a - (b-a)) = f(b)$ . Tale funzione può essere estesa per periodicità a tutta la retta reale. La funzione che otteniamo, che continuiamo a chiamare  $f$ , è continua e  $2(b-a)$ -periodica. Allora esiste un polinomio trigonometrico  $P_n(x)$ ,  $2(b-a)$ -periodico, tale che

$$|f(x) - P_n(x)| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{per ogni } x \in [a, b].$$

Osserviamo poi che

$$e^{i\lambda x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\lambda x)^k}{k!}$$

e che la serie converge uniformemente su ogni intervallo compatto di  $\mathbb{R}$ , in particolare su  $[a, b]$ . Ne deduciamo che esiste un polinomio  $Q(x)$  tale che

$$|P_n(x) - Q(x)| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{per ogni } x \in [a, b],$$

e il teorema di Weierstrass segue.  $\square$

**Osservazione 6.3.3.** Una dimostrazione alternativa del Corollario 6.3.2 si basa sul teorema di Stone-Weierstrass (si veda il teorema 9.7.7). Infatti è immediato verificare che l'insieme dei polinomi trigonometrici

- È un'algebra di funzioni (cioè la somma e il prodotto di due polinomi trigonometrici è un polinomio trigonometrico, così come il prodotto di un numero complesso per un polinomio trigonometrico);
- Separa i punti di  $[-\pi, \pi]$  (cioè per ogni coppia di punti  $x \neq y$  in  $[-\pi, \pi]$  esiste un polinomio trigonometrico—qui basta considerare  $P(x) = e^{ix}$ —tale che  $f(x) \neq f(y)$ );
- Non si annulla in  $[-\pi, \pi]$  (cioè per ogni punto  $x \in [-\pi, \pi]$  esiste un polinomio trigonometrico—qui di nuovo basta considerare  $P(x) = e^{ix}$ —che non si annulla in  $x$ );
- È un'algebra autoaggiunta (cioè contiene  $\overline{P(x)}$  se contiene  $P(x)$ ).

Sempre dal Teorema 6.3.1 segue che:

**Teorema 6.3.4.** Sia  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  un intervallo compatto, e  $1 \leq p < +\infty$ .

Allora

(a) lo spazio vettoriale generato dalle funzioni  $e^{in\frac{2\pi}{b-a}x}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  è denso in  $L^p([a, b])$ ;

(b) lo spazio vettoriale dei polinomi, generato dalle funzioni  $1, x, x^2, \dots$  è denso in  $L^p([a, b])$ ;

(c) l'insieme di funzioni  $\{\frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  è un sistema ortonormale massimale in  $L^2([-\pi, \pi])$ ;

(d) per ogni  $f \in L^p([a, b])$  e per ogni  $\epsilon > 0$  esiste una funzione  $g \in C^\infty(\mathbb{R})$  tale che

$$\|f - g\|_p = \left( \int_a^b |f(x) - g(x)|^p dx \right)^{1/p} < \epsilon;$$

**Dimostrazione.** (a) Sia  $f \in L^p([a, b])$ . Sappiamo che esiste una funzione continua  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$\|g - f\|_p = \left( \int_a^b |g - f|^p dx \right)^{1/p} < \frac{\epsilon}{3}.$$

In generale  $g(b) \neq g(a)$ , e  $g$  non è periodica. Definiamo allora, per ogni  $\mu > 0$ ,

$$g_\mu(x) = \begin{cases} g(x) & a \leq x \leq b - \mu \\ \frac{g(b-\mu) - g(a)}{\mu}(b - x) + g(a) & b - \mu \leq x \leq b \end{cases}$$

La funzione  $g_\mu(x)$  è, per ogni  $\mu > 0$ , continua in  $[a, b]$ , e  $g_\mu(a) = g_\mu(b)$ . Prolungandola in modo periodico otteniamo una funzione continua e  $(b-a)$ -periodica su tutto  $\mathbb{R}$ . Abbiamo anche che  $\max|g_\mu(x)| \leq \max|g(x)|$ . Ne segue che

$$\int_a^b |g(x) - g_\mu(x)|^p dx = \int_{b-\mu}^b |g(x) - g_\mu(x)|^p dx \leq (2M)^p \mu.$$

Scegliendo  $\mu < (\epsilon/6M)^p$  abbiamo subito che  $\|g_\mu - g\|_p < \epsilon/3$ .

Essendo  $g_\mu$  continua e periodica, sappiamo allora che esiste un polinomio trigonometrico  $(b-a)$ -periodico  $P_n(x)$  tale che

$$|g_\mu(x) - P_n(x)| < \frac{\epsilon}{3(b-a)^{1/p}} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Allora

$$\|P_n - g_\mu\|_p = \left( \int_a^b |P_n(x) - g_\mu(x)|^p dx \right)^{1/p} < \frac{\epsilon}{3}.$$

In conclusione abbiamo che

$$\|f - P_n\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g - g_\mu\|_p + \|g_\mu - P_n\|_p < \epsilon$$

e il primo punto è dimostrato.

(b) Sia  $f \in L^p([a, b])$ , e  $g$  continua tale che  $\|f - g\|_p < \epsilon/2$ . Utilizzando il Corollario 6.3.2(b) troviamo un polinomio  $Q(x)$  tale che

$$|g(x) - Q(x)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)^{1/p}} \quad \text{per ogni } x \in [a, b].$$

Allora

$$\|f - Q\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g - Q\|_p < \epsilon$$

e anche questo punto è dimostrato.

(c) Questa è una conseguenza immediata del punto (a) con  $p = 2$ .

(d) Anche questo punto è una conseguenza immediata del punto (b) o del punto (a).  $\square$

#### 6.4. Convergenza Puntuale della serie di Fourier

**Lemma 6.4.1.** *Sia  $f \in L^1([a, b])$ .*

*Allora*

$$(6.4.1) \quad \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) e^{i\alpha x} dx \rightarrow 0$$

**Dimostrazione.** Fissiamo  $\epsilon > 0$ . Per il Teorema 6.3.4(d) esiste  $g$  di classe  $C^\infty$  su tutto  $\mathbb{R}$  tale che

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx < \frac{\epsilon}{2}.$$

Osserviamo poi che

$$\left| \int_a^b g(x) e^{i\alpha x} dx \right| = \left| \frac{g(x) e^{i\alpha x}}{i\alpha} \Big|_{x=a}^{x=b} - \frac{1}{i\alpha} \int_a^b g'(x) e^{i\alpha x} dx \right| \leq \frac{C}{\alpha}.$$

Allora

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) e^{i\alpha x} dx \right| &\leq \left| \int_a^b (f(x) - g(x)) e^{i\alpha x} dx \right| + \left| \int_a^b g(x) e^{i\alpha x} dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x) - g(x)| dx + \frac{C}{\alpha} \leq \epsilon \end{aligned}$$

per  $\alpha$  grande e la tesi segue.  $\square$

**Teorema 6.4.2.** *Sia  $f \in L^1([-\pi, \pi])$  e  $x \in [-\pi, \pi]$ .*

*Supponiamo che  $f$  verifichi la condizione del Dini:*

1.  $f$  ammette limite destro  $f(x+)$  e sinistro  $f(x-)$  in  $x$ ;
2. per qualche  $\delta > 0$ ,

$$(6.4.2) \quad \int_{-\delta}^0 \frac{|f(x+s) - f(x-)|}{|s|} ds + \int_0^\delta \frac{|f(x+s) - f(x+)|}{|s|} ds < +\infty.$$

Allora la serie di Fourier di  $f$  converge nel punto  $x$  al valore medio  $m(x) = (f(x+) + f(x-))/2$ , cioè

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| S_n(f, x) - \frac{f(x+) + f(x-)}{2} \right| \rightarrow 0.$$

**Dimostrazione.** Osserviamo che, essendo  $D_n(s)$  pari,

$$\int_{-\pi}^0 D_n(s) ds = \int_0^{\pi} D_n(s) ds = \pi.$$

Dalla (6.2.7) segue allora

$$\begin{aligned} S_n(f, x) - m(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s+x) D_n(s) ds \\ &\quad - f(x-) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 D_n(s) ds - f(x+) \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} D_n(s) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{f(s+x) - f(x-)}{\sin(s/2)} \sin(n+1/2)s ds \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(s+x) - f(x+)}{\sin(s/2)} \sin(n+1/2)s ds. \end{aligned}$$

Dalla (6.4.2) segue facilmente che la funzione

$$s \mapsto \frac{|f(x+s) - f(x-)|}{|s|} \in L^1([-\pi, 0]),$$

e che la funzione

$$s \mapsto \frac{|f(x+s) - f(x+)|}{|s|} \in L^1([0, \pi]).$$

Poiché la funzione

$$s \mapsto \frac{s}{\sin(s/2)}$$

è limitata in tutto  $[-\pi, \pi]$ , otteniamo che

$$\begin{aligned} g_1(s) &= \frac{f(x+s) - f(x-)}{\sin(s/2)} \in L^1([-\pi, 0]) \\ g_2(s) &= \frac{f(x+s) - f(x+)}{\sin(s/2)} \in L^1([0, \pi]) \end{aligned}$$

Possiamo allora applicare alla  $g_1$  e alla  $g_2$  il Lemma 6.4.1, e il risultato segue.  $\square$

Una immediata conseguenza del teorema precedente è la seguente:

**Corollario 6.4.3.** Sia  $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,  $T$ -periodica. Allora la serie di Fourier di  $f$

$$\sum_{k=-n}^n \hat{f}_k u_k(x)$$

dove

$$u_n(x) = \frac{e^{2\pi i n x / T}}{\sqrt{T}} \quad \hat{f}(n) = \int_0^T f(x) \overline{u_n(x)} dx$$

converge a  $f$  uniformemente su tutto  $\mathbb{R}$ .

**Dimostrazione.** Possiamo applicare il Teorema 6.4.2 in tutti i punti  $x \in \mathbb{R}$ . Quindi abbiamo subito la convergenza puntuale della serie di Fourier. Per dimostrare la convergenza uniforme della serie di Fourier, osserviamo che la funzione  $f'(x)$  è continua e  $T$ -periodica su tutto  $\mathbb{R}$ . Quindi, in particolare,  $f' \in L^2([0, T])$ . Ne deduciamo che i coefficienti di Fourier  $c_n$  di  $f'$  sono tali che

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 < +\infty.$$

D'altra parte, per ogni  $n \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} c_n &= \int_0^T f'(x) \overline{u_n(x)} dx = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T f'(x) e^{-2\pi i n x / T} dx \\ &= \frac{2\pi i n}{T\sqrt{T}} \int_0^T f(x) e^{-2\pi i n x / T} dx = \frac{2\pi i n}{T} \hat{f}(n), \end{aligned}$$

mentre  $c_0 = 0$ . Ne deduciamo che

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=-n}^n \hat{f}_k u_k(x) \right| &\leq \sum_{k=-n}^n |\hat{f}_k| = |\hat{f}_0| + \sum_{\substack{k=-n \\ k \neq 0}}^n |k \hat{f}_k| \frac{1}{|k|} \\ &\leq |\hat{f}_0| + \left( \sum_{k=-n}^n k^2 |\hat{f}_k|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{\substack{k=-n \\ k \neq 0}}^n \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \\ &= |\hat{f}_0| + \left( \sum_{k=-n}^n \frac{T^2}{4\pi^2} |c_k|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{\substack{k=-n \\ k \neq 0}}^n \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \\ &\leq |\hat{f}_0| + \frac{T}{2\sqrt{3}} \|f'\|_2, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato la ben nota identità  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = \pi^2/6$  (si veda l'esercizio 2).  $\square$

---

**Esercizi Capitolo 6**

- (1) Sia  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una successione convergente al limite  $a$  (finito o infinito). Si dimostri che la successione

$$b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$$

converge allo stesso limite  $a$ . Si diano esempi in cui  $a_n$  non converge ma  $b_n$  converge.

- (2) Si calcolino i coefficienti di Fourier della funzione  $f(x) = x$  in  $L^2([-\pi, \pi])$ . Si scriva poi l'identità di Parseval  $\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}_n|^2$  relativa a tale funzione e se ne deduca che

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$