

PROVA SCRITTA ANALISI I - MODULO A

Esercizio 1. Tracciare accuratamente il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{e^{-1/x}}{1+x}$$

Indicare dominio di f , punti notevoli, limiti, eventuali asintoti, l'espressione della derivata prima e seconda (7 punti).

Esercizio 2. Calcolare la somma della serie (3 punti)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{2^n}$$

Esercizio 3. Determinare il carattere delle serie (3 punti)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n^3 + 1}}$$

Esercizio 4. Scrivere, fino all'ordine 3, lo sviluppo di Taylor della funzione (4 punti):

$$f(x) = x^2 + (\sin x) \log(1+x) \quad \text{nel punto } x_0 = 0$$

Esercizio 5. Calcolare l'integrale definito (3 punti)

$$\int_1^2 (x^2 + 2)2^x dx$$

Esercizio 6. Calcolare i seguenti integrali indefiniti (4 + 3 punti)

$$\int \frac{3}{(4x^2 + 1)^2} dx \qquad \int \arccos x dx$$

Esercizio 7. Calcolare l'integrale improprio (3 punti)

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \log^2 x}$$

Esercizio 8. Dire se, al variare di $a \in \mathbb{R}$, risulta convergente, divergente o non esiste l'integrale improprio (4 punti)

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x^a - (x-1)^a} dx$$

Esercizio 9. Calcolare il limite puntuale delle successioni di funzioni

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + n^2 x}$$

nell'insieme $[0, +\infty]$ (2 punti). La convergenza è uniforme in $[0, 1]$? E in $[1, \infty]$? (3 punti)?

Esercizio 10. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_1^{\infty} a_n x^n$ se a_n è dato da

$$\frac{n!}{3^{n/2}} \quad (2 \text{ punti})$$