

PROVA SCRITTA ANALISI I - MODULO A

Esercizio 1. Determinare l'insieme di definizione della seguente funzione (5 punti):

$$f(x) = e^{-\arcsin(x^2/100)} + \log(1/2 - \sin^2 x)$$

Esercizio 2. Calcolare i seguenti limiti (3 punti ciascuno)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos(x^2))}{\sin x(1 - e^x)}$$
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{1 - x + x^2} \right)$$

Esercizio 3. Dimostrare la validità delle seguenti disequazioni:

$$x \leq \arcsin x \leq x + \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)x^2 \quad \text{per ogni } 0 \leq x \leq 1$$

(2 punti per la prima, 3 per la seconda)

Esercizio 4. Determinare massimi e minimi relativi e assoluti della funzione

$$f(x) = |x + 2| + |x^2 - 4|$$

nell'intervallo $[-4, 4]$ (4 punti).

Esercizio 5. Trovare le radici complesse dell'equazione

$$z^4 - 4iz - 3 = 0.$$

(4 punti)

Esercizio 6. Calcolare i limiti delle successioni (3 punti ciascuno)

$$a_n = \frac{n!}{2^{2n}}, \quad \frac{(2n)!}{n^n};$$

Esercizio 7. Siano f e g funzioni derivabili e convesse in $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Mostrare che la funzione $f + g$ è convessa in (a, b) (5 punti).