

PROVA SCRITTA ANALISI I - MODULO A

Esercizio 1. Determinare l'insieme di definizione della seguente funzione (5 punti):

$$f(x) = \log \sin \sqrt{1 - x^2} + \log \sin(x - 1)$$

Esercizio 2. Calcolare i seguenti limiti (3 punti ciascuno)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x \log(1 + \sin x - x)}$$
$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2 + \sin x) \log(1 + \sin 1/x)$$

Esercizio 3. Determinare massimi e minimi relativi e assoluti della funzione

$$f(x) = |x + 1| + \frac{1}{x - 4}$$

nell'intervallo $[-3, 3]$ (4 punti).

Esercizio 4. Trovare le radici complesse dell'equazione

$$(z + 1)(\bar{z} - 1) - 3 = 0$$

(4 punti)

Esercizio 5. Calcolare i limiti delle successioni (4 punti ciascuno)

$$a_n = n! e^{-n} \sin \frac{1}{n}, \quad a_n = \frac{(2n + 1)!}{(3n)!} 2^n;$$

Esercizio 6. Dimostrare che l'equazione

$$x^2 = \sin \frac{\pi x}{2}$$

ha esattamente due soluzioni reali (5 punti).

Esercizio 7. Sia f una funzione convessa e derivabile in \mathbb{R} . Mostrare che se a e b sono minimi relativi per f , allora f è costante nell'intervallo di estremi a e b e quindi $f(a) = f(b)$ (5 punti).