

PROVA SCRITTA ANALISI I - MODULO A

Esercizio 1. Determinare l'insieme di definizione della seguente funzione (5 punti):

$$f(x) = \sqrt{\log(2 \sin^2 x)}$$

Esercizio 2. Calcolare i seguenti limiti (4 punti ciascuno)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{6}{3 + \log_2 x}}$$
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{\arctan x}$$

Esercizio 3. Determinare massimi e minimi relativi e assoluti della funzione

$$f(x) = x + |\sin x|$$

nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ (5 punti).

Esercizio 4. Trovare parte reale e parte immaginaria delle radici complesse dell'equazione

$$z^6 - 2z^3 + 1 = 0$$

(6 punti)

Esercizio 5. Calcolare i limiti delle successioni (3 punti ciascuno)

$$a_n = \frac{n^n}{e^n n!}, \quad a_n = \frac{\log(n+1) - \log n}{\sin \frac{1}{n}};$$

Esercizio 6. Dimostrare che la funzione $x \mapsto x^p$ è convessa per ogni $p > 1$). Utilizzare ciò per mostrare che per ogni coppia a, b di numeri reali non negativi e per ogni $p \geq 1$ vale

$$(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$$

(2 + 3 punti).

Esercizio 7. Calcolare massimo e minimo limite delle seguenti successioni

$$a_n = \frac{1}{n} + \sin \frac{n\pi}{7} \quad a_n = \arctan((-1)^n n)$$

(3 + 3 punti)