

PROVA SCRITTA ANALISI I - MODULO A

Esercizio 1. Determinare l'insieme di definizione della seguente funzione (5 punti):

$$f(x) = \arcsin \log_{1/2} \frac{x}{x-1}$$

Esercizio 2. Calcolare i seguenti limiti (4 punti ciascuno)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x - \sin^2 2x}{\log(1 + \arctan^2 x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x^2 + 1} \right)^{x(x-1)}$$

Esercizio 3. Determinare massimi e minimi relativi e assoluti della funzione

$$f(x) = |4x^2 - 1| - |2 - x^2|$$

nell'intervallo $[-3, 3]$ (5 punti).

Esercizio 4. Calcolare la parte reale e parte immaginaria delle radici complesse dell'equazione

$$z^4 + 8\bar{z}^{-1} = 0$$

(6 punti)

Esercizio 5. Calcolare i limiti delle successioni (3 punti ciascuno)

$$a_n = \sqrt{e^n + n} - \sqrt{e^n - n}, \quad a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/\sin(\pi + \frac{1}{n})};$$

Esercizio 6. Mostrare, con degli esempi, che il teorema di Weierstrass non vale per la funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ se

- (1) f non è continua;
- (2) A è un intervallo aperto;
- (3) A è un intervallo non limitato.

(2 + 2 + 2 punti).

Esercizio 7. Provare che ogni numero naturale ≥ 2 è un punto di accumulazione per l'insieme

$$\left\{ \frac{n}{m} + p \frac{m}{n} \mid n, m, p \in \mathbb{R} \right\}$$

(5 punti)