

PROVA SCRITTA ANALISI I - MODULO B

Esercizio 1. Tracciare accuratamente il grafico della funzione

$$f(x) = \arctan x - \frac{x}{1+x^2}$$

Indicare dominio di f , punti notevoli, limiti, eventuali asintoti, l'espressione della derivata prima e seconda (8 punti).

Esercizio 2. Determinare il carattere delle serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 + (-1)^n n}{n^2} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+3}{2n-1} \right)^n$$

(3 punti ciascuno)

Esercizio 3. Calcolare il seguente limite (5 punti):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \sin x + \sin^2 x)^{1/x} - (1 + \sin x)^{1/x}}{x}$$

Esercizio 4. Calcolare l'integrale definito (3 punti)

$$\int_0^{\pi} \cos x \sin 3x \, dx$$

Esercizio 5. Calcolare i seguenti integrali indefiniti (3 + 4 punti)

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x-1} \, dx \quad \int \frac{dx}{(1+x^2)^3}$$

Esercizio 6. Si calcoli l'integrale improprio (3 punti):

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} \, dx.$$

Dire se, al variare di $a > 0$ risulta convergente, divergente o non esiste l'integrale improprio (4 punti)

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\arctan 1/x^a}$$

Esercizio 7. Calcolare il limite puntuale della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{\log nx}{n}$$

nell'insieme $[0, +\infty]$ (3 punti). La convergenza è uniforme in $[2, 3]$? E in $[2, \infty]$? (4 punti)?

Esercizio 8. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_1^{\infty} a_n x^n$ se a_n è dato da

$$a_n = \frac{5^n n!}{(2n)^n} \quad (3 \text{ punti})$$