

PROVA SCRITTA ANALISI I - MODULO B

**Esercizio 1.** Tracciare accuratamente il grafico della funzione

$$f(x) = \arctan x - \frac{x}{1+x^2}$$

Indicare dominio di  $f$ , punti notevoli, limiti, eventuali asintoti, l'espressione della derivata prima e seconda (8 punti).

**Esercizio 2.** Determinare il carattere delle serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 + (-1)^n n}{n^2} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{n+3}{2n-1} \right)^n$$

(3 punti ciascuno)

**Esercizio 3.** Calcolare il seguente limite (5 punti):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \sin x + \sin^2 x)^{1/x} - (1 + \sin x)^{1/x}}{x}$$

**Esercizio 4.** Calcolare l'integrale definito (3 punti)

$$\int_0^{\pi} \cos x \sin 3x \, dx$$

**Esercizio 5.** Calcolare i seguenti integrali indefiniti (3 + 4 punti)

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x-1} \, dx \quad \int \frac{dx}{(1+x^2)^3}$$

**Esercizio 6.** Si calcoli l'integrale improprio (3 punti):

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} \, dx.$$

Dire se, al variare di  $a > 0$  risulta convergente, divergente o non esiste l'integrale improprio (4 punti)

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\arctan 1/x^a}$$

**Esercizio 7.** Calcolare il limite puntuale della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{\log nx}{n}$$

nell'insieme  $[0, +\infty]$  (3 punti). La convergenza è uniforme in  $[2, 3]$ ? E in  $[2, \infty]$ ? (4 punti)?

**Esercizio 8.** Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze  $\sum_1^{\infty} a_n x^n$  se  $a_n$  è dato da

$$a_n = \frac{5^n n!}{(2n)^n} \quad (3 \text{ punti})$$