

## PROVA SCRITTA ANALISI II - MODULO A

**Esercizio 1.** Si consideri la funzione

$$f(x, y) = \log \frac{x^2 - 1 + y}{(y + 3)(3 - x)}.$$

Di tale funzione si determini l'insieme di definizione (e lo si rappresenti nel piano cartesiano), il comportamento al bordo dell'insieme di definizione, il gradiente, massimi, minimi e punti stazionari. (8 punti)

**Esercizio 2.** Si consideri la funzione

$$f(x, y) = \sin(x^4 + y^4).$$

Ti tale funzione si determinino i punti stazionari (precisando se si tratti di minimi, massimi o punti di sella). Si rappresenti poi il campo vettoriale gradiente nel piano cartesiano. (8 punti)

**Esercizio 3.** Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y'' + 4y' + 5y = xe^{-x} + \sin 2x.$$

(6 punti)

**Esercizio 4.** Dopo aver verificato l'applicabilità del teorema di esistenza e unicità (locale o globale?) per il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{2xy}{x^2+y^2} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

si calcoli esplicitamente la soluzione. (6 punti)

**Esercizio 5.** Sia  $y(x)$  la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (2 - y)(y + xe^{x^2}) \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

Si dimostri che l'intervallo massimale di esistenza per tale soluzione  $y$  contiene  $[0, \infty)$ , e si calcoli il limite  $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$ . (8 punti)