

**PROVA SCRITTA FONDAMENTI DI ANALISI  
MATEMATICA 2**

**Esercizio 1.** Sia  $E$  il sottoinsieme di  $X = L^2([-1, 1])$  delle funzioni pari e a media nulla, cioè

$$E = \left\{ f \in X \mid \int_{-1}^1 f \, dm = 0, \quad f(x) = f(-x) \quad \forall x \in [-1, 1] \right\}.$$

Si dimostri che  $E$  è un sottospazio vettoriale chiuso.

Si definisca l'applicazione  $\Lambda: E \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$\Lambda(f) = \int_0^1 (1+s)f(s) \, ds$$

Si mostri che  $\Lambda$  è ben definito, lineare e continuo. Se ne calcoli la norma e si cerchi un'estensione a tutto  $X$  che conservi la norma.

**Esercizio 2.** Dare significato e calcolare

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^4 + 1)(x - 1)}$$

**Esercizio 3.** Sia  $\mathbb{Q} \cap [0, 1] = \{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $q_1 = 0$  e  $f: [0, 1] \rightarrow [0, +\infty]$  la seguente funzione

$$f(x) = \sum_{n \text{ tali che } q_n \leq x} \frac{1}{2^n}.$$

Si discuta la derivabilità della funzione  $f$  e della misura che si può definire ponendo

$$\mu([0, x]) = f(x) - f(0)$$