**CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA**
**PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (I E II GRUPPO)**
**23 FEBBRAIO 2012**

Svolgere i seguenti esercizi, *giustificando tutte le risposte*. Sui fogli consegnati vanno indicati: nome, cognome, matricola e gruppo di appartenenza. Non è necessario consegnare la traccia.

**Esercizio 1.** Scrivere la definizione di *dominio di integrità* e quella di *campo*. Fornire, ove possibile, un esempio di:

($i$) anello che non sia un dominio di integrità;
($ii$) dominio di integrità che non sia un campo;
($iii$) campo;
($iv$) campo che non sia un dominio di integrità.

**Esercizio 2.** ($i$) in $\mathbb{Z}$, il numero $4^{27}$ divide $1\dot{}203\dot{}721^4$?
($ii$) Determinare i numeri $m \in \mathbb{N}^{\#}$ tali che $[2]_m + [15]_m = [7]_m + [2]_m$.
($iii$) Determinare i numeri $m \in \mathbb{N}^{\#}$ tali che $[3]_m + [7]_m = [11]_m + [5]_m$ e $[3]_m \cdot [7]_m = [11]_m \cdot [5]_m$.

**Esercizio 3.** Si consideri l'applicazione

$$f\colon X \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \longmapsto \begin{cases} -1 & \text{se } X \text{ è infinito} \\ \mathrm{rest}(|X|, 5) & \text{se } X \text{ è finito} \end{cases} \in \mathbb{Z}.$$

($i$) Determinare $f(\mathcal{P}(\mathbb{Z}))$.
($ii$) Per ogni $x \in f(\mathcal{P}(\mathbb{Z}))$ determinare un $X \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ tale che $f(X) = x$.

Posto $K := \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \le x \le 10\}$, sia $T = \{X \in \mathcal{P}(K) \mid f(X) = 0\}$.

($iii$) Caratterizzare, in termini dei loro ordini, gli elementi di $T$ e determinare $|T|$, facendo uso di un'opportuna nozione di calcolo combinatorio.
($iv$) Stabilire se $(T, \subseteq)$ è un reticolo; in caso di risposta affermativa dire se esso è distributivo e se è complementato.

**Esercizio 4.** Dare la definizione di *polinomio irriducibile* nell'anello dei polinomi su un campo. Enunciare il *Teorema di Ruffini* ed il *Teorema di Ruffini generalizzato*.

Nell'anello $(\mathbb{Z}_3[x], +, \cdot\,)$ si considerino i sottoinsiemi

$$A = \{x^2k \mid k \in \mathbb{Z}_3[x]\}, \qquad B = \{f \in \mathbb{Z}_3[x] \mid f(\bar{0}) = \bar{0}\}, \qquad \text{e} \qquad C = \{(x - \bar{1})h \mid h \in \mathbb{Z}_3[x]\}.$$

($i$) Verificare che $A$ è chiuso rispetto a $\cdot$ e $+$; verificare poi che $(A, +)$ è un gruppo.
($ii$) $B$ contiene $A$? Se sì, lo contiene strettamente?
($iii$) Descrivere $B \cap C$.
($iv$) Determinare la forma ed il numero dei polinomi di grado 4 appartenenti a $B \cap C$.
($v$) Determinare, se possibile, un polinomio di grado 4 appartenente a $B \cap C$ che sia prodotto di tre polinomi irriducibili.
($vi$) Determinare, se possibile, un polinomio di grado 4 appartenente a $B \cap C$ che sia prodotto di tre polinomi irriducibili e che ammetta $\bar{2}$ come radice.