CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (I E II GRUPPO)
18 MAGGIO 2012

Svolgere i seguenti esercizi, *giustificando tutte le risposte*. Sui fogli consegnati vanno indicati: nome, cognome, matricola e gruppo di appartenenza. Non è necessario consegnare la traccia.

Esercizio 1. Sia $S = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Per ogni $k \in \mathbb{N}^\#$ si ponga $S_k = \{n \in S \mid n \text{ è diviso da esattamente } k \text{ primi positivi distinti}\}$ (ad esempio, $8 \in S_1$, $500 \in S_2$).

(i) Verificare che $\mathcal{F} := \{S_k \mid k \in \mathbb{N}^\#\}$ è una partizione di S.
(ii) Esiste una relazione di equivalenza $\mathcal{R}$ in S tale che $\mathcal{F} = S/\mathcal{R}$?
(iii) In caso affermativo, descrivere la classe di equivalenza di 210 rispetto a tale relazione $\mathcal{R}$.

Esercizio 2. Sia $f\colon n \in \mathbb{N} \longmapsto \pi(n) \in \mathcal{P}(\mathbb{P})$ (come di consueto, $\mathbb{P}$ indica l'insieme dei numeri primi positivi e, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\pi(n) = \{p \in \mathbb{P} : p \mid n\}$). Si consideri la relazione d'ordine σ_f definita in $\mathbb{N}$ da:

$$(\forall\, a, b \in \mathbb{N})\,(a \;\sigma_f\; b \iff a = b \;\vee\; f(a) \subset f(b))\,.$$

(i) Individuare gli eventuali minimo, massimo, elementi minimali, elementi massimali in $(\mathbb{N}, \sigma_f)$. $(\mathbb{N}, \sigma_f)$ è un reticolo?
(ii) Se possibile, determinare un sottoinsieme Y di $\mathbb{N}$ tale che $|Y| = 4$ e (Y, σ_f) sia un reticolo, specificando se esso è un reticolo booleano.
(iii) Posto $X = \{15, 21, 105, 210, 315\}$, descrivere (se esistono) in $(\mathbb{N}, \sigma_f)$: i minoranti di X, i maggioranti di X, $\inf X$, $\sup X$. Si disegni il diagramma di Hasse di (X, σ_f).

Esercizio 3. Si studi l'operazione $*$ definita sull'insieme $R = \mathbb{Z}_{40}$ delle classi di resto modulo 40 ponendo, per ogni a, $b \in R$,

$$a * b = a + \overline{25}b - \overline{10}.$$

In particolare, si stabilisca se $*$ è commutativa e se è associativa, se esistono in $(R, *)$ elementi neutri a destra, elementi neutri a sinistra, elementi neutri. L'operazione $*$ è distributiva a destra rispetto alla ordinaria addizione in $\mathbb{Z}_{40}$?

Esercizio 4. Si enunci il teorema di Ruffini generalizzato.

Dati i polinomi $h = (x^2 - 1)(3x + 2)$ e $k = (x - 4)^2$ in $\mathbb{Q}[x]$,

(i) esiste un polinomio $g \in \mathbb{Q}[x]$ tale che $f = h + gk$ abbia 1 e -1 come radici? Nel caso, fornirne un esempio e rispondere alle domande che seguono:
(ii) è possibile scegliere un tale g in modo che f abbia grado 3?
(iii) è possibile scegliere un tale g in modo che f abbia grado 10?
(iv) esistono infiniti $g \in \mathbb{Q}[x]$ con la proprietà richiesta in (i)?