CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (I E II GRUPPO)
6 SETTEMBRE 2012

Svolgere i seguenti esercizi, *giustificando tutte le risposte*. Sui fogli consegnati vanno indicati: nome, cognome, matricola e gruppo di appartenenza. Non è necessario consegnare la traccia.

Esercizio 1. Si studi l'operazione $*$ definita in $\mathbb{Z}_{10}$ da

$$a * b = \bar{3}ab - a - b + \bar{4}$$

per ogni $a, b \in \mathbb{Z}_{10}$, stabilendo:

(i) se $*$ è commutativa;
(ii) se $*$ è associativa;
(iii) se $*$ ammette elemento neutro;
(iv) quali tra $\bar{0}$, $\bar{1}$, $\bar{2}$ e $\bar{6}$ sono invertibili in $(\mathbb{Z}_{10}, *)$, determinando gli eventuali inversi;
(v) che genere di struttura è $(\mathbb{Z}_{10}, *)$.

Esercizio 2. Sia σ la relazione d'ordine definita in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ da:

$$(\forall\, a, b, c, d \in \mathbb{N})\, ((a, b)\ \sigma\ (c, d) \iff a + 1 \mid c + 1 \ \wedge\ b \leq d)\,.$$

(i) Individuare gli eventuali minimo, massimo, elementi minimali, elementi massimali in $(\mathbb{N}\times\mathbb{N}, \sigma)$.
(ii) Determinare i maggioranti di $X := \{0, 1, 2, 3\} \times \{7\}$ in $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \sigma)$ e, se esiste, $\sup X$ (sempre in $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \sigma)$).
(iii) Posto $S = \{(0, 0), (1, 1), (3, 3), (3, 7), (5, 5), (11, 1), (11, 11), (119, 11)\}$, si disegni il diagramma di Hasse di (S, σ). (S, σ) è un reticolo? È un reticolo booleano? È un reticolo complementato? È un reticolo distributivo?

Esercizio 3. Data una relazione di equivalenza α su un insieme K, cosa è, per definizione, la classe di equivalenza rispetto ad α di un elemento $t \in K$? E cosa è l'insieme quoziente K/α?

Sia ora $\sim$ la relazione binaria definita in $J := \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ponendo

$$a \sim b \iff a^2 - 1 \equiv_8 b^2 - 1$$

per ogni $a, b \in J$. Dopo aver verificato che $\sim$ è una relazione di equivalenza,

(i) si descrivano esplicitamente $[2]_\sim$ e $[9]_\sim$.
(ii) Quanti e quali sono gli elementi di $J/\!\sim$?
(iii) Descrivere, se possibile, un sottoinsieme A di J tale che, $|A| = 6$ e, rispetto alla relazione di equivalenza indotto su esso da $\sim$, A abbia esattamente due classi.

Infine, si consideri la relazione di equivalenza τ definita in $\mathbb{Z}$ ponendo $a\ \tau\ b \iff a^2 - 1 \equiv_8 b^2 - 1$ per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$.

(iv) Quanti elementi ha $\mathbb{Z}/\tau$?

Esercizio 4. Determinare gli interi n tali che il polinomio $f := \bar{3}x^5 + \bar{2}x^4 + \bar{5}x^3 + \bar{6}\bar{n}x^2 - \bar{4}x + \bar{1} \in \mathbb{Z}_{31}[x]$ sia divisibile (in $\mathbb{Z}_{31}[x]$) per $x - \bar{2}$.