CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (I E II GRUPPO)
16 NOVEMBRE 2012

Svolgere i seguenti esercizi, *giustificando tutte le risposte*. Sui fogli consegnati vanno indicati: nome, cognome, matricola e gruppo di appartenenza. Non è necessario consegnare la traccia.

Esercizio 1. Relativamente a polinomi a coefficienti in un campo K, dare le definizioni di polinomio invertibile (e caratterizzare i polinomi invertibili), di polinomio monico, di polinomio irriducibile, di polinomio nullo, di coppia di polinomi associati.

Stabilire per quali primi p il polinomio $f = \overline{99}x^3 + \overline{144}x^2 + \overline{15}x + \overline{6} \in \mathbb{Z}_p[x]$ è:

(i) di grado 3;
(ii) nullo;
(iii) monico.

Si indichi il minimo primo $p > 10$ per il quale f abbia grado 3. Fissato questo primo,

(iv) $\overline{1}$ è radice di f?
(v) $\overline{2}$ è radice di f?
(vi) Tenendo presente il fatto che f ha al più una radice, si decomponga f come prodotto di polinomi irriducibili in $\mathbb{Z}_p[x]$.
(vii) qual è (se esiste) il polinomio monico di $\mathbb{Z}_p[x]$ associato a f?

Esercizio 2. Siano $\mathbb{P}$ l'insieme dei numeri primi positivi e $M = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 2\}$. Si studino iniettività e suriettività di $f\colon (p, q) \in \mathbb{P} \times \mathbb{P} \mapsto p + q \in M$ e si calcolino l'immagine $\overrightarrow{f}(\{(3, 7), (2, 11)\})$ e le antiimmagini $\overleftarrow{f}(\{18\})$ e $\overleftarrow{f}(\{2\})$.

Esercizio 3. Ancora nell'insieme $\mathbb{P} \times \mathbb{P}$ si consideri la relazione d'ordine Σ definita ponendo, per ogni $(a, b), (c, d) \in \mathbb{P} \times \mathbb{P}$,

$$(a, b)\ \Sigma\ (c, d) \iff \big((a \leq c) \wedge (b \leq d)\big).$$

(i) $(\mathbb{P} \times \mathbb{P}, \Sigma)$ è totalmente ordinato? Ha minimo? Ha massimo?
(ii) Determinare, in $(\mathbb{P} \times \mathbb{P}, \Sigma)$ gli insiemi dei minoranti e dei maggioranti di $A = \{(7, 5), (2, 11)\}$, e determinare, se esistono, $\inf A$ e $\sup A$.
(iii) Sia $X = \{(2, 3), (2, 5), (3, 5), (3, 7), (7, 11)\}$. Si disegni il diagramma di Hasse di (X, Σ). (X, Σ) è un reticolo? Se lo è, è distributivo? È complementato?

Esercizio 4. Siano $S = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 6\}$ e $T = \{n \in \mathbb{Z} \mid (|n| < 10) \wedge (n \text{ è pari})\}$. Si indichino:

(i) $|S|$, $|T|$, $|S \cup T|$, $|S \cap T|$;
(ii) il numero delle applicazioni iniettive da S a T e quello delle applicazioni iniettive da T a S;
(iii) il numero delle parti di T che abbiano cardinalità 3;
(iv) il numero degli elementi di $\mathcal{P}(S) \cap \mathcal{P}(T)$; come possono essere caratterizzati questi elementi?

Infine, sapendo che esistono esattamente 877 partizioni dell'insieme S, quante sono le relazioni di equivalenza in S?

Esercizio 5. Si studi l'operazione binaria $\circ$ definita in $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ ponendo, per ogni $X, Y \subseteq \mathbb{Z}$,

$$X \circ Y = (X \cap \mathbb{N}) \cup Y.$$

(i) Si stabilisca se $\circ$ è associativa, se è commutativa, se ammette elemento neutro.
(ii) $\mathcal{P}(\mathbb{Z} \smallsetminus \mathbb{N})$ è chiusa rispetto a $\circ$? Se lo è, che tipo di struttura è $(\mathcal{P}(\mathbb{Z} \smallsetminus \mathbb{N}), \circ)$? (un semigruppo, un monoide, un gruppo, nessuna di queste, ...; commutativa oppure no?)