CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (I E II GRUPPO)
14 DICEMBRE 2012

Svolgere i seguenti esercizi, *giustificando tutte le risposte*. Sui fogli consegnati vanno indicati: nome, cognome, matricola e gruppo di appartenenza. Non è necessario consegnare la traccia.

Esercizio 1. L'applicazione $\psi\colon f \in \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}} \mapsto f(2) \in \mathbb{Z}$ è iniettiva? È suriettiva?

Esercizio 2. Rappresentare con un diagramma di Venn: $\big((A \setminus B) \cap (A \mathbin{\triangle} C)\big) \cup (B \setminus A)$.

Esercizio 3. In $A := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{10}$ si definisca un'operazione binaria $*$ ponendo, per ogni $a, c \in \mathbb{Z}$, $\bar{b}, \bar{d} \in \mathbb{Z}_{10}$,

$$(a, \bar{b}) * (c, \bar{d}) = (ac, \bar{b}\bar{d}\bar{a}).$$

(*i*) Si stabilisca se $*$ è associativa, se è commutativa, se ammette elementi neutri, a destra o a sinistra.

(*ii*) Posto $X = 1 + 10\mathbb{Z} = \{1 + 10k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $B := X \times \mathbb{Z}_{10}$ è chiusa rispetto a $*$? Se lo è, che tipo di struttura è $(B, *)$? (un semigruppo, un monoide, un gruppo, nessuna di queste, ...; commutativa oppure no?).

Si consideri la relazione binaria $\sim$ così definita in B: $\forall\, (a, \bar{b}), (c, \bar{d}) \in B$

$$(a, \bar{b}) \sim (c, \bar{d}) \iff (ac > 0 \wedge b \equiv_2 d).$$

(*iii*) $\sim$ è una relazione di equivalenza? Se lo è, rispondere anche alle domande che seguono.

(*iv*) Descrivere gli elementi di $[(131, \bar{4})]_\sim$. Questa classe è un insieme finito o infinito?

(*v*) Descrivere in modo esplicito l'insieme quoziente $B/\!\sim$. Quanti sono i suoi elementi?

Esercizio 4. Sia τ la relazione binaria definita in $\mathbb{N}$ ponendo, per ogni $n, m \in \mathbb{N}$,

$$m \mathrel{\tau} n \iff \big((n \leq m) \wedge (\mathrm{rest}(n, 10) \leq \mathrm{rest}(m, 10)\big).$$

τ è una relazione d'ordine? Se lo è, si risponda alle domande che seguono.

(*i*) Si descrivano gli eventuali minimo, massimo, elementi minimali, elementi massimali in $(\mathbb{N}, \tau)$.

(*ii*) Posto $X = \{2, 6, 17, 23, 25, 32, 59, 105\}$, si disegni il diagramma di Hasse di (X, τ); si indichino gli eventuali minimo, massimo, elementi minimali, elementi massimali in (X, τ) e si stabilisca se (X, τ) è un reticolo.

(*iii*) Esiste $y \in X$ tale che $(X \setminus \{y\}, \tau)$ sia un reticolo? Se sì, indicare un tale y.

(*iv*) In $(\mathbb{N}, \tau)$ determinare, se esistono, $\inf\{37, 54\}$ e $\sup\{37, 54\}$.

(*v*) $(\mathbb{N}, \tau)$ è un reticolo?

Esercizio 5. Sia $V = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 10\}$ e sia ρ la relazione binaria in V definita ponendo, per ogni $x, y \in V$,

$$x \mathrel{\rho} y \iff |x - y| = 2.$$

Disegnare il grafo $G = (V, \rho)$ (cioè il grafo su V che abbia ρ come relazione di adiacenza). G è connesso? È un albero? È una foresta?

Esercizio 6. Fornire, o spiegare perché non esistono, esempi di polinomi f tali che:

(1) $f \in \mathbb{R}[x]$, f ha grado 9, f non ha radici in $\mathbb{R}$;
(2) $f \in \mathbb{Q}[x]$, f ha grado 9, f non ha radici in $\mathbb{Q}$;
(3) $f \in \mathbb{R}[x]$, f ha grado 8, f non ha radici in $\mathbb{R}$;
(4) $f \in \mathbb{R}[x]$, f ha grado 8, f ha una ed una sola radice in $\mathbb{R}$;
(5) $f \in \mathbb{Q}[x]$, f ha grado 8, f è il prodotto di due polinomi irriducibili in $\mathbb{Q}[x]$.