CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (I E II GRUPPO)
29 GENNAIO 2013

Svolgere i seguenti esercizi, *giustificando tutte le risposte.* Sui fogli consegnati vanno indicati: nome, cognome, matricola e gruppo di appartenenza. Non è necessario consegnare la traccia.

Esercizio 1. Sia f l'applicazione $n \in \mathbb{N}^* \longmapsto \operatorname{rest}(8, n) \in \mathbb{N}$.

(i) Si determini l'immagine $\operatorname{im} f = \vec{f}(\mathbb{N}^*)$ di f.

(ii) Detto $\Re_f$ il nucleo di equivalenza di f, si studi l'insieme quoziente $\mathbb{N}^*/\Re_f$, descrivendone esplicitamente tutte le classi, ciascuna con i rispettivi elementi.

(iii) Sia Σ la relazione d'ordine definita in $\mathbb{N}^*$ ponendo, per ogni $n, m \in \mathbb{N}^*$,

$$n \,\Sigma\, m :\Longleftrightarrow n = m \text{ oppure } \operatorname{rest}(8, n) \text{ è un divisore proprio di } \operatorname{rest}(8, m).$$

Si determinino in $(\mathbb{N}^*, \Sigma)$ eventuali minimo, massimo, elementi minimali, elementi massimali.

(iv) Considerato il sottoinsieme $X = \{1, 3, 5, 6, 7, 9\}$ di $\mathbb{N}^*$, si disegni il diagramma di Hasse di (X, Σ). Inoltre

- (a) Per tutte le coppie $(x, y) \in X \times X$ di elementi non confrontabili tra loro, determinare $\inf \{x, y\}$ e $\sup \{x, y\}$.
- (b) Spiegare perché (X, Σ) è un reticolo, e stabilire se è un reticolo complementato, determinando nel caso, per ogni $x \in X$, un complemento di x.
- (c) Dedurre da (b) che (X, Σ) non è distributivo.

Esercizio 2. Si studi l'operazione binaria $*$ definita in $\mathbb{Z}_{210}$ ponendo, per ogni $a, b \in \mathbb{Z}_{210}$,

$$a * b = a + \overline{15}b.$$

(i) $*$ è commutativa? È associativa?

(ii) Esiste in $(\mathbb{Z}_{210}, *)$ un elemento neutro a destra, un elemento neutro a sinistra, un elemento neutro?

(iii) Si verifichi che $T := \{\overline{15z} \mid z \in \mathbb{Z}\}$ è una parte chiusa in $(\mathbb{Z}_{210}, *)$.

(iv) Che tipo di struttura è $(T, *)$? (un semigruppo, un monoide, un gruppo, nessuna di queste, ...; commutativa oppure no?).

(v) Determinare gli $n \in \mathbb{N}$ tali che $12 \leq n \leq 16$ e $\bar{n}$ sia invertibile in $(\mathbb{Z}_{210}, \cdot)$, calcolando $\bar{n}^{-1}$.

Esercizio 3.

(i) Si verifichi che il polinomio $f = x^2 + x + \bar{9} \in \mathbb{Z}_{11}[x]$ è l'associato monico di $g = \bar{4}x^2 + \bar{4}x + \bar{3}$, determinando $k \in \mathbb{Z}_{11}$ tale che $f = kg$.

(ii) Verificare che $I = \{sf \mid s \in \mathbb{Z}_{11}[x]\}$ coincide con $J = \{h \in \mathbb{Z}_{11}[x] \mid h(\bar{1}) = h(-\bar{2}) = \bar{0}\}$.

(iii) Determinate in I, se esiste,

- (a) un polinomio h di grado 3 il cui insieme delle radici sia $\{\bar{1}, -\bar{2}\}$;
- (b) un polinomio t di grado 3 che sia prodotto di due polinomi irriducibili;
- (c) un polinomio irriducibile p di grado 3.

(iv) Dopo aver elencato in modo esplicito gli elementi del sottoinsieme $T = \{c^2 \mid c \in \mathbb{Z}_{11}\}$ di $\mathbb{Z}_{11}$ ed aver calcolato $|T|$, dire quali e quanti sono i polinomi *irriducibili* di $\mathbb{Z}_{11}[x]$ della forma $x^2 - a$, con $a \in \mathbb{Z}_{11}$.

(v) Nell'insieme J definito al punto (ii), si trovino, se possibile, polinomi u e v di grado 4 in modo che u sia il prodotto di due polinomi irriducibili e v sia il prodotto di tre polinomi irriducibili (in $\mathbb{Z}_{11}[x]$).