CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I, II , RECUPERO)
20 GIUGNO 2013

Svolgere i seguenti esercizi, *giustificando tutte le risposte*. Sui fogli consegnati vanno indicati: nome, cognome, matricola e gruppo di appartenenza. Non è necessario consegnare la traccia.

Esercizio 1. Si consideri l'applicazione $f\colon (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longmapsto a^2 + b^2 \in \mathbb{N}$. Sia $\mathcal{R}_f$ il nucleo di equivalenza di f.

(i) f è iniettiva? f è suriettiva?
(ii) Si determinino gli elementi di: $[(0,0)]_{\mathcal{R}_f}$, $[(2,0)]_{\mathcal{R}_f}$, $[(3,4)]_{\mathcal{R}_f}$.
(iii) Caratterizzare le coppie $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tali che $a^2 + b^2$ sia pari.

Si consideri ora la relazione d'ordine Σ_f definita ponendo, per ogni $a, b, c, d \in \mathbb{N}$,

$$(a,b)\ \Sigma_f\ (c,d) \iff (a,b) = (c,d) \vee f(a,b) < f(c,d).$$

(iv) Σ_f è di ordine totale?
(v) Si determinino in $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \Sigma_f)$ gli eventuali minimo, massimo, elementi minimali, elementi massimali.
(vi) Disegnare il diagramma di Hasse di (X, Σ_f), dove

$$X = \{(7,2), (6,0), (6,1), (1,1), (1,0), (3,4), (4,3), (5,0)\}.$$

(vii) (X, Σ_f) è un reticolo? Se lo è, è distributivo?, è complementato?

Esercizio 2. In $S = \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_{10}$ si consideri l'operazione $*$ così definita: per ogni $(\bar{a}, \hat{b}), (\bar{c}, \hat{d}) \in S$,

$$(\bar{a}, \hat{b}) * (\bar{c}, \hat{d}) = (\bar{a} + \bar{c} + \bar{2}, \hat{9}\hat{b}\hat{d}).$$

(i) Si verifichi che $(S, *)$ è un monoide commutativo;
(ii) se ne determinino gli elementi invertibili. Si determini, in particolare, il simmetrico di $(\bar{7}, \hat{7})$, mediante un'opportuna equazione congruenziale.
(iii) Stabilire se la parte $\mathbb{Z}_7 \times \{\hat{1}, \hat{9}\}$ è chiusa rispetto a $*$.

Esercizio 3. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere per ogni insieme ordinato $(X, \leq)$, giustificando le risposte:

(a) Se X è un reticolo, in X esistono $\sup X$ e $\inf X$.
(b) Se X ha massimo e minimo, X è un reticolo.
(c) Se X è un reticolo e $|X| = 8$, X è un reticolo booleano.
(d) Se X è un reticolo finito e $|X|$ non è potenza di 2, X non è booleano.
(e) Se X è un reticolo complementato, ogni suo elemento ha un unico complemento.
(f) Se X è un reticolo booleano, ogni suo elemento ha un unico complemento.

Esercizio 4. Per ogni numero primo (positivo) p sia f_p il polinomio $\overline{30}x^4 + \overline{16}x^3 + \bar{2}x^2 - x + \bar{1} \in \mathbb{Z}_p[x]$. Si trovi il primo p per il quale f_p sia monico di grado 3 ed abbia $\bar{1}$ come radice. Per tale valore di p, scrivere f_p come prodotto di polinomi monici irriducibili in $Z_p[x]$.