CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I, II, RECUPERO)
14 NOVEMBRE 2013

Svolgere i seguenti esercizi, *giustificando tutte le risposte*. Sui fogli consegnati vanno indicati: nome, cognome, matricola e gruppo di appartenenza. Non è necessario consegnare la traccia.

Esercizio 1. Dare le definizioni di: *anello*, *campo*, *dominio di integrità*. Fornire, se esistono (ma, in caso contrario, spiegare perché non esistono) esempi di:

(i) un anello che non sia un campo;
(ii) un campo che non sia un dominio di integrità;
(iii) un dominio di integrità che non sia un campo;
(iv) un anello infinito che non sia un dominio di integrità.

Esercizio 2. Rappresentare su un diagramma di Venn di tipo generale l'espressione insiemistica $(A \smallsetminus B) \triangle (B \cup C)$.

Esercizio 3. È dato il semigruppo $(S, *)$, dove $S = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e, per ogni $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) \in S$,

$$(a_1, b_1, c_1) * (a_2, b_2, c_2) = (a_1a_2, a_1b_2 + b_1c_2, c_1c_2).$$

(i) $*$ è commutativa?
(ii) $(S, *)$ ha elemento neutro? Nel caso lo abbia, dire quali elementi di S sono invertibili rispetto a $*$, descrivendone esplicitamente gli inversi.
(iii) $(S, *)$ è un monoide? $(S, *)$ è un gruppo?
(iv) $T := \{(a, b, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ è una parte chiusa in $(S, *)$? Nel caso lo sia, $(T, *)$ è un semigruppo commutativo? È un monoide? È un gruppo?

Esercizio 4. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, si indichi con $c(n)$ l'insieme delle cifre nella rappresentazione decimale di n (dunque, ad esempio, $c(2303) = \{0, 2, 3\}$, $c(8) = \{8\}$). Definita l'applicazione

$$f : n \in \mathbb{N} \mapsto (\min c(n), \max c(n)) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},$$

sia ρ il nucleo di equivalenza di f.

(i) f è iniettiva? f è suriettiva?
(ii) Esistono numeri naturali n tali che $|[n]_\rho| = 1$? Caratterizzare tali n.
(iii) Descrivere in modo esplicito $[10]_\rho$.

Sia σ la relazione d'ordine definita in $\mathbb{N}$ da: $\forall n, m \in \mathbb{N}$

$$n \ \sigma \ m \iff \big(n = m \ \vee \ \max c(n) < \max c(m)\big).$$

(iv) Caratterizzare gli eventuali elementi minimali, massimali, minimo, massimo in $(\mathbb{N}, \sigma)$.
(v) $(\mathbb{N}, \sigma)$ è un reticolo?
(vi) Determinare in $(\mathbb{N}, \sigma)$ una parte totalmente ordinata massimale.
(vii) Disegnare il diagramma di Hasse di $A := \{11010001, 123, 31, 40\}$, ordinato da σ.
($viii$) (A, σ) è un reticolo? Nel caso lo sia, è distributivo?, è complementato?, è booleano?

Esercizio 5. Per ogni naturale primo p sia $f_p = \bar{7}x^4 + \bar{5}x^3 - \bar{2} \in \mathbb{Z}_p[x]$.

(i) Risolvendo un'opportuna equazione congruenziale, si determini, se esiste, un associato monico di f_{17} in $\mathbb{Z}_{17}[x]$.
(ii) Si scriva f_5 come prodotto di un invertibile e di polinomi monici irriducibii in $\mathbb{Z}_5[x]$.
(iii) Si scriva f_3 come prodotto di un invertibile e di polinomi monici irriducibii in $\mathbb{Z}_3[x]$.