CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I, II, RECUPERO)
16 DICEMBRE 2013

Svolgere i seguenti esercizi, *giustificando* ***pienamente*** *tutte le risposte*. Sui fogli consegnati vanno indicati: nome, cognome, matricola e gruppo di appartenenza. Non è necessario consegnare la traccia.

Esercizio 1. Per definizione, quando è che un elemento a di un semigruppo $(S,*)$ si dice cancellabile? È vero che, in un monoide, ogni elemento simmetrizzabile è cancellabile? È vero che, in un monoide, ogni elemento cancellabile è simmetrizzabile?

Nel monoide $(\mathcal{P}(\mathbb{Z}),\cup))$, l'elemento $\mathbb{N}$ è cancellabile?

Esercizio 2. È data l'applicazione $f\colon n\in\mathbb{Z}\mapsto \bar{6}\bar{n}^2+\bar{4}\in\mathbb{Z}_{10}$.

(i) f è iniettiva? f è suriettiva?
(ii) Descrivere in modo esplicito $[0]_\rho$ e $[1]_\rho$, dove ρ è il nucleo di equivalenza di f.

Esercizio 3. Per ogni $X\in\mathcal{P}(\mathbb{N})$ si definisca in $\mathbb{N}$ la relazione binaria $\mathcal{R}_X$ ponendo, per ogni $a,b\in\mathbb{N}$:

$$a\ \mathcal{R}_X\ b \iff (\exists x\in X)(b=ax).$$

(i) È vero che, per ogni scelta di X, la relazione $\mathcal{R}_X$ è antisimmetrica?
(ii) Caratterizzare le parti X di $\mathbb{N}$ tali che $\mathcal{R}_X$ sia riflessiva.
(iii) Caratterizzare le parti X di $\mathbb{N}$ tali che $\mathcal{R}_X$ sia transitiva. [Suggerimento: siano $a,b\in X$; allora $1\ \mathcal{R}_X\ a$ e $a\ \mathcal{R}_X\ ab$. Se $\mathcal{R}_X$ è transitiva, quale conseguenza se ne trae?]

Avendo posto $A=2\mathbb{N}$ (l'insieme dei naturali pari), $B=\mathbb{N}\smallsetminus 2\mathbb{N}$ (l'insieme dei naturali dispari) e $C=\{n\in\mathbb{N}\mid n>10\}$, esattamente uno tra A, B e C, chiamiamolo T, ha la proprietà che $\mathcal{R}_T$ sia una relazione d'ordine.

(iv) Quale tra A, B e C è T?
(v) Caratterizzare in $(\mathbb{N},\mathcal{R}_T)$ gli eventuali elementi minimali, massimali, minimo, massimo;
(vi) indicare se esistono (o spiegare perché non esistono) $\inf\{18,30\}$ e $\sup\{18,20\}$ in $(\mathbb{N},\mathcal{R}_T)$;
(vii) $(\mathbb{N},\mathcal{R}_T)$ è un reticolo? Nel caso lo sia, è distributivo? È complementato? È booleano?
($viii$) Se $S=\{0,1,2,6,9,18\}$ e $X=\mathbb{N}\smallsetminus\{2,4,5,121\}$, $\mathcal{R}_X$ induce una relazione d'ordine su S. Disegnare il diagramma di Hasse di $(S,\mathcal{R}_X)$;
(ix) $(S,\mathcal{R}_X)$ è un reticolo?
(x) Esiste un elemento $x\in S$ tale che $S\smallsetminus\{x\}$, ordinato dalla relazione indotta da $\mathcal{R}_X$, sia un reticolo? (Nel caso, indicare un tale x?). Questo reticolo è distributivo?
(xi) Esistono $x,y\in S$ tali che $S\smallsetminus\{x,y\}$, ordinato dalla relazione indotta da $\mathcal{R}_X$, sia un reticolo booleano? (Nel caso, indicare tali x e y).

Esercizio 4. Per ogni $f\in\mathbb{Q}[x]$, sia $R(f)=\{c\in\mathbb{Q}\mid f(c)=0\}$, l'insieme delle radici razionali di f.

(i) È vero che, per ogni $f,g\in\mathbb{Q}[x]$, se f divide g (in $\mathbb{Q}[x]$) allora $R(f)\subseteq R(g)$?
(ii) Viceversa, è vero che, per ogni $f,g\in\mathbb{Q}[x]$, se $R(f)\subseteq R(g)$ allora f divide g (in $\mathbb{Q}[x]$)?
(iii) Trovare, se esiste, un polinomio $h\in\mathbb{Q}[x]$ di grado 5 tale che $|R(h)|=1$ e h non abbia divisori irriducibili di grado maggiore di 1.
(iv) Descrivere esplicitamente l'insieme $A=\big\{g\in\mathbb{Q}[x]\mid\{1,-1\}\subseteq R(g)\big\}$.

Si definisca un'operazione binaria $*$ in $\mathbb{Q}[x]$ ponendo, per ogni f, $g\in\mathbb{Q}[x]$,

$$f*g=\begin{cases}\prod_{c\in R(g)}(x-c) & \text{se } R(g)\neq\varnothing\\ 1 & \text{se } R(g)=\varnothing.\end{cases}$$

(v) $*$ è commutativa? $*$ è associativa?
(vi) $(\mathbb{Q}[x],*)$ ha elementi neutri a destra? Ha elementi neutri a sinistra? Ha elemento neutro?
(vii) L'insieme dei polinomi monici in $\mathbb{Q}[x]$ è una parte chiusa rispetto a $*$?