CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I, II, RECUPERO)
28 GENNAIO 2014

Svolgere i seguenti esercizi, *giustificando* ***pienamente*** *tutte le risposte*. Sui fogli consegnati vanno indicati: nome, cognome, matricola e gruppo di appartenenza. Non è necessario consegnare la traccia.

Esercizio 1. Per definizione, cosa è un *albero*? Sia T è un albero con esattamente 125 vertici e n lati. Cosa sappiamo dire su n?

Esercizio 2. Per ogni parte non vuota X di $\mathbb{N}$, sia $\pi(X) = \{p \in \mathbb{P} \mid (\exists x \in X)(p|x)\}$ (come di consueto, indichiamo con $\mathbb{P}$ l'insieme dei numeri naturali primi). Posto $M = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 2\}$ si consideri l'applicazione

$$f \colon X \in \mathcal{P}(M) \smallsetminus \{\varnothing\} \longmapsto \min \pi(X) \in \mathbb{P}.$$

(*i*) f è iniettiva? f è suriettiva?

(*ii*) Calcolare $f(D)$, dove D è l'insieme dei numeri interi dispari maggiori di 1, e $f(3\mathbb{N}^{\#})$.

(*iii*) Descrivere in modo esplicito $[\{6\}]_{\sim}$, dove $\sim$ è il nucleo di equivalenza di f.

Si definisca in $S := \mathcal{P}(M) \smallsetminus \{\varnothing\}$ la relazione d'ordine $\mathcal{R}$ ponendo, per ogni $X, Y \in \mathcal{R}$:

$$X \mathrel{\mathcal{R}} Y \iff (X = Y \vee f(X) < f(Y)).$$

(*iv*) Determinare in $(S, \mathcal{R})$ gli eventuali elementi minimali, massimali, minimo, massimo.

(*v*) Sia $A = \{\{7, 9\}, \{11, 15\}\}$. In $(S, \mathcal{R})$, descrivere l'insieme dei minoranti di A, l'insieme dei maggioranti di A e, se esistono, $\inf A$ e $\sup A$.

(*vi*) $(S, \mathcal{R})$ è un reticolo?

(*vii*) Sia $B = \{\{2, 5\}, \{7, 9\}, \{11, 15\}, \{7, 11\}, \{11, 13, 29\}\}$. Disegnare il diagramma di Hasse di $(B, \mathcal{R})$. $(B, \mathcal{R})$ è un reticolo? Nel caso lo sia, è distributivo? È complementato? È booleano?

(*viii*) Esiste un insieme finito C tale che $(B, \mathcal{R})$ sia isomorfo a $(\mathcal{P}(C), \subseteq)$?

Esercizio 3. Si consideri il semigruppo commutativo $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, *)$, dove, per ogni $a, b, c, d \in \mathbb{R}$,

$$(a, b) * (c, d) = (ac + 2bd, ad + bc).$$

(*i*) Verificare che $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, *)$ è un monoide.

(*ii*) Determinare, se esistono, gli inversi in $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, *)$ di $(2, 2)$ e $(\sqrt{2}, 1)$.

(*iii*) $\mathbb{R} \times \{0\}$ è una parte chiusa rispetto a $*$? Se sì, $(\mathbb{R} \times \{0\}, *)$ è isomorfo a $(\mathbb{R}, \cdot)$?

(*iv*) $\{0\} \times \mathbb{R}$ è una parte chiusa rispetto a $*$? Se sì, $(\{0\} \times \mathbb{R}, *)$ è isomorfo a $(\mathbb{R}, \cdot)$?

Esercizio 4. Stabilire per quali interi $m > 1$ esiste $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$ tale che

$$\bar{4}\bar{a} + \bar{3} = \bar{5} + \bar{7}. \qquad (\diamond)$$

Detto n il minimo tale intero m che sia compreso tra 10 e 20, si determini $\bar{a} \in \mathbb{Z}_n$ che soddisfi $(\diamond)$.

Esercizio 5.

(*i*) È vero che ogni polinomio di grado 11 in $\mathbb{Q}[x]$ ha almeno una radice in $\mathbb{R}$?

(*ii*) È vero che ogni polinomio di grado 11 in $\mathbb{Q}[x]$ ha almeno una radice in $\mathbb{Q}$?

(*iii*) Trovare, se esiste (o, in caso contrario, spiegare perché non esiste), un polinomio $f \in \mathbb{R}[x]$ di grado 8 che sia il prodotto di due polinomi irriducibili.

(*iv*) Trovare, se esiste (o, in caso contrario, spiegare perché non esiste), un polinomio $g \in \mathbb{Q}[x]$ di grado 8 che sia il prodotto di due polinomi irriducibili.