CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I, II, RECUPERO)
18 FEBBRAIO 2014

Svolgere i seguenti esercizi, *giustificando* ***pienamente*** *tutte le risposte*. Sui fogli consegnati vanno indicati: nome, cognome, matricola e gruppo di appartenenza. Non è necessario consegnare la traccia.

Esercizio 1. Fornire la definizione di *partizione* di un insieme S.
Sia A un insieme. Se $|A| = 4$, quante sono le partizioni F di A tali che $|F| = 2$?

Esercizio 2. Siano α e β le relazioni binarie definite in $\mathbb{Z}$ ponendo, per ogni $n, m \in \mathbb{Z}$

$$n \; \alpha \; m \iff \big(n = m \;\vee\; (\mathrm{rest}(n,7) + \mathrm{rest}(m,7) = 7)\big);$$
$$n \; \beta \; m \iff \big(n \equiv_7 m \vee\; (\mathrm{rest}(n,7) + \mathrm{rest}(m,7) = 7)\big).$$

Dimostrare che esattamente una tra α e β è una relazione di equivalenza. Quale? Con riferimento a questa equivalenza, descrivere in modo esplicito l'insieme quoziente e le classi di equivalenza. Quanti sono gli elementi dell'insieme quoziente?

Esercizio 3. Per ogni $n \in \mathbb{Z}$, sia $\pi(n) = \{p \in \mathbb{P} \mid p|n\}$, dove $\mathbb{P}$ è l'insieme dei numeri interi primi positivi. Sia σ la relazione d'ordine in $\mathbb{Z}$ definita da:

$$(\forall a, b \in \mathbb{Z})(a \; \sigma \; b \iff (a \le b \wedge \pi(a) \subseteq \pi(b))).$$

(*i*) σ è totale?
(*ii*) Determinare in $(\mathbb{Z}, \sigma)$ gli eventuali elementi minimali, massimali, minimo, massimo.
(*iii*) $(\mathbb{Z}, \sigma)$ è un reticolo?
(*iv*) Sia $A = \{10, 12\}$. Descrivere, in $(\mathbb{Z}, \sigma)$, l'insieme dei minoranti di A, e, se esiste, $\inf A$.

Sia $S = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 10, 12, 30, 60\}$.

(*v*) Disegnare il diagramma di Hasse di (S, σ).
(*vi*) (S, σ) è un reticolo? Nel caso lo sia, è distributivo? È complementato? È booleano?
(*vii*) Dimostrare che esiste un unico $x \in S$ tale che $(S \setminus \{x\}, \sigma)$ sia un reticolo. Questo reticolo è distributivo? È complementato? È booleano?
(*viii*) Esistono $x, y \in S$ tali che $(S \setminus \{x, y\}, \sigma)$ sia un reticolo booleano? Nel caso, trovare tali x e y.

Esercizio 4.

(*i*) Trovare l'insieme delle soluzioni (in $\mathbb{Z}$) dell'equazione congruenziale $8x \equiv_{34} 2$.
(*ii*) Per ogni $k \in \mathbb{Z}_{17}$, si consideri l'applicazione $f_k \colon \bar{n} \in \mathbb{Z}_{17} \mapsto \bar{n}(\bar{4}k - \bar{1}) \in \mathbb{Z}_{17}$. Tenendo presente quanto al punto precedente, dire per quali, e quanti, valori di k l'applicazione f_k è iniettiva e per quali, e quanti, valori di k l'applicazione f_k è suriettiva.

Esercizio 5. Per ogni primo p sia f_p il polinomio $x^4 + 5x^3 - 10x^2 - 4x + 1 \in \mathbb{Z}_p[x]$. Fattorizzare in prodotto di polinomi irriducibili:

(*i*) f_5 in $\mathbb{Z}_5[x]$;
(*ii*) f_3 in $\mathbb{Z}_3[x]$;
(*iii*) f_2 in $\mathbb{Z}_2[x]$. Tenere presente il fatto che $x^2 + x + 1$ è l'unico polinomio irriducibile di grado 2 in $\mathbb{Z}_2[x]$.

Si ricorda che è parte essenziale dell'esercizio la giustificazione del fatto che i fattori indicati come tali siano effettivamente irriducibili.