CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I, II, RECUPERO)
18 MARZO 2014

Svolgere i seguenti esercizi, *giustificando* ***pienamente*** *tutte le risposte*. Sui fogli consegnati vanno indicati: nome, cognome, matricola e gruppo di appartenenza. Non è necessario consegnare la traccia.

Esercizio 1. Fornire le definizioni di *dominio di integrità* e di *campo*. Se possibile, fornire esempi di:

(i) un dominio di integrità che non sia un campo;
(ii) un campo che non sia un dominio di integrità;
(iii) un anello che non sia un dominio di integrità.

Esercizio 2. Posto $S = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 10\}$, per ogni parte X di S si ponga $\hat{X} = \{10 - x \mid x \in X\}$ e si consideri l'applicazione $f \colon X \in \mathcal{P}(S) \mapsto \hat{X} \in \mathcal{P}(S)$.

(i) Determinare $f(\{1\})$, $f(\{5, 7\})$ e $f(S)$;
(ii) f è iniettiva?
(iii) f è suriettiva?
(iv) Calcolare l'applicazione composta $f \circ f$.

Detto $\mathcal{R}$ il nucleo di equivalenza di f, si descrivano gli elementi di $\mathcal{P}(S)/\mathcal{R}$ e si calcoli $|\mathcal{P}(S)/\mathcal{R}|$.

Esercizio 3. Vero o falso? Tutte le frasi sono riferite ad un insieme ordinato (non vuoto) $(X, \leq)$.

(i) Se $(X, \leq)$ è un reticolo, certamente esistono $\inf X$ e $\sup X$.
(ii) Se esistono $\inf X$ e $\sup X$, allora certamente $(X, \leq)$ è un reticolo.
(iii) Se $(X, \leq)$ è un reticolo finito, certamente esistono $\inf X$ e $\sup X$.
(iv) Se $(X, \leq)$ è limitato e totalmente ordinato, e se $|X| > 2$, allora X non può essere complementato.
(v) Se $(X, \leq)$ è totalmente ordinato, allora sicuramente X è distributivo.
(vi) Se $(X, \leq)$ è un reticolo finito e $|X|$ è una potenza di 2, allora X è necessariamente booleano.
(vii) Se $(X, \leq)$ è un reticolo finito booleano, allora $|X|$ è necessariamente una potenza di 2.

Esercizio 4. Si definiscano, nel prodotto cartesiano $R := \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{19}$ due operazioni binarie $\oplus$ e $*$ ponendo, per ogni $a, c \in \mathbb{Z}_6$ e $b, d \in \mathbb{Z}_{19}$, $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$ e $(a, b) * (c, d) = (ac, bd)$. Verificare che $(R, \oplus, *)$ è un anello commutativo unitario.

(i) Determinare gli invertibili ed in divisori dello zero in $(R, \oplus, *)$, indicandone anche il numero. Verificare che tutti gli elementi non nulli e non invertibili sono divisori dello zero.
(ii) Determinare tutti e soli gli $(x, y) \in R$ tali che $(\bar{4}, \bar{8}) * (x, y) = (\bar{8}, \bar{4})$.

Esercizio 5. Sia M l'insieme dei polinomi monici di grado 3 in $\mathbb{Z}_3[x]$.

(i) Calcolare $|M|$.

Siano poi $A = \{f \in M \mid \bar{1} \text{ è radice di } f\}$ e $B = \{f \in M \mid \bar{1} \text{ e } \bar{2} \text{ sono radici di } f\}$.

(ii) Caratterizzare gli elementi di A e calcolare $|A|$.
(iii) Caratterizzare gli elementi di B e calcolare $|B|$.
(iv) È vero che ogni elemento di A è prodotto di tre polinomi irriducibili?
(v) È vero che ogni elemento di B è prodotto di tre polinomi irriducibili?