CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I, II, RECUPERO)
21 MAGGIO 2014

Svolgere i seguenti esercizi, *giustificando* ***pienamente*** *tutte le risposte*. Sui fogli consegnati vanno indicati: nome, cognome, matricola e gruppo di appartenenza. Non è necessario consegnare la traccia.

Esercizio 1. Si consideri l'applicazione $f\colon n \in \mathbb{N}^{\#} \longmapsto |D(n)| \in \mathbb{N}^{\#}$, dove, per ogni $n \in \mathbb{N}^{\#}$ si è posto $D(n) = \{a \in \mathbb{N} \mid a|n\}$.

(i) f è suriettiva?

(ii) f è iniettiva?

Sia $\mathcal{R}$ il nucleo di equivalenza di f. Allora:

(iii) Determinare gli elementi di $[1]_{\mathcal{R}}$, $[7]_{\mathcal{R}}$, $[6]_{\mathcal{R}}$;

(iv) Dire (giustificando in dettaglio le risposte) se le seguenti implicazioni sono vere o false per ogni $x, y \in \mathbb{N}^{\#}$:

(a) $x < y \Rightarrow |D(x)| < |D(y)|$;

(b) $|D(x)| < |D(y)| \Rightarrow x < y$;

(c) $(x|y \wedge x \neq y) \Rightarrow |D(x)| < |D(y)|$.

Sia ora Σ la relazione d'ordine definita da: $(\forall x, y \in \mathbb{N}^{\#})\big(x \,\Sigma\, y \iff (f(x) < f(y) \vee x = y)\big)$.

(v) Σ è totale?

(vi) Quali sono gli elementi di $\mathbb{N}^{\#}$ che, rispetto a Σ, risultano confrontabili con ogni elemento di $\mathbb{N}^{\#}$?

(vii) $(\mathbb{N}^{\#}, \Sigma)$ ha minimo? Ha massimo?

($viii$) Sia $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. (X, Σ) è un reticolo? Nel caso, è distributivo? È complementato?

Esercizio 2. Dare la definizione di *anello*; in quali casi un anello si dice *commutativo* o *unitario*?

Nell'insieme A delle applicazioni da $\mathbb{Z}_9$ a $\mathbb{Z}_9$ si definiscono le operazioni $+$ e $\cdot$ ponendo, per ogni f, $g \in A$,

$$f + g\colon x \in \mathbb{Z}_9 \mapsto f(x) + g(x) \in \mathbb{Z}_9; \qquad f \cdot g\colon x \in \mathbb{Z}_9 \mapsto f(x)g(x) \in \mathbb{Z}_9.$$

Risulta che $(A, +, \cdot)$ è un anello commutativo unitario (non è richiesta la verifica di questi fatti).

(i) Si determini in questo anello:

(a) l'elemento neutro rispetto all'addizione;

(b) l'opposto di un arbitrario elemento $f \in A$;

(c) l'elemento neutro rispetto alla moltiplicazione;

(d) l'insieme degli elementi invertibili.

Indicata, per ogni $a \in \mathbb{Z}_9$, con f_a l'applicazione costante $f_a\colon x \in \mathbb{Z}_9 \mapsto a \in \mathbb{Z}_9$,

(ii) si dimostri che $B := \{f_a \mid a \in \mathbb{Z}_9\}$ è una parte chiusa di $\mathbb{Z}_9$ rispetto a $+$ ed a $\cdot$;

(iii) si determini l'inverso in A di $f_{\bar{7}}$.

Esercizio 3. Per ogni primo p, sia f_p il polinomio $f_p = x^3 + x + \bar{4} \in \mathbb{Z}_p[x]$. Determinare i primi p tali che f_p sia divisibile per $x - \bar{2}$ in $\mathbb{Z}_p[x]$.

(i) Per ciascuno di tali primi, decomporre f_p in prodotto di polinomi irriducibili monici.

(ii) In $\mathbb{Z}_7[x]$, indicare, per ogni intero $n \in \mathbb{N}^{\#}$, un polinomio di grado $n + 1$ che sia prodotto di n polinomi irriducibili (non necessariamente distinti).