CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I, II, RECUPERO)
14 LUGLIO 2014

Svolgere i seguenti esercizi, *giustificando* ***pienamente*** *tutte le risposte*. Sui fogli consegnati vanno indicati: nome, cognome, matricola e gruppo di appartenenza. Non è necessario consegnare la traccia.

Esercizio 1. Vero o falso? (E perché?)

(*i*) L'equazione congruenziale $24x \equiv_{128} 40$ ha soluzioni in $\mathbb{Z}$.
(*ii*) L'equazione congruenziale $24x \equiv_{128} 40$ ha esattamente una soluzione modulo 128.
(*iii*) Esistono $a, b \in \mathbb{Z}$ tali che $24a + 128b = 40$.
(*iv*) Per definizione, un anello commutativo è un dominio di integrità se e solo se tutti i suoi elementi diversi dallo zero sono invertibili.
(*v*) Posto $A = \{1, 4, 7, 10\}$ e $B = \{2, 5, 6\}$, si ha: $\{n \in \mathbb{N} \mid n \in A \Rightarrow n \in B\} = \varnothing$.

Esercizio 2. Nell'insieme $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 9\}$ si consideri la relazione binaria $\sim$ definita da:

$$(\forall a, b \in A)(a \sim b \iff (a^2 \equiv_4 b^2 \ \wedge \ 10a + 1 \equiv_{15} 10b + 1)).$$

(*i*) Verificare che $\sim$ è una relazione di equivalenza.
(*ii*) Descrivere l'insieme quoziente $A/\!\sim$, elencando in modo esplicito gli elementi di ciascuna delle classi di equivalenza e calcolando $|A/\!\sim|$.

Esercizio 3. In $S := \mathbb{N} \times \{0, 1\}$ si definiscano le relazioni binarie ρ e σ:

$$(\forall (a, i), (b, j) \in S) \qquad \begin{array}{l} (a, i)\ \rho\ (b, j) \iff (a|b \wedge i \leq j); \\ (a, i)\ \sigma\ (b, j) \iff (a|b \vee i \leq j). \end{array}$$

(*i*) Spiegare perché ρ è una relazione d'ordine e perché σ non lo è.
(*ii*) (S, ρ) è un reticolo? Determinarne gli (eventuali) elementi minimali, massimali, minimo, massimo.
(*iii*) Descrivere l'insieme dei maggioranti di $A := \{(10, 0), (14, 0), (2, 1)\}$ in (S, ρ) e, se esiste, $\sup A$.

Posto $X = \{(1, 0), (2, 0), (2, 1), (4, 0), (6, 0), (10, 0), (100, 1)\}$,

(*iv*) Disegnare il diagramma di Hasse di (X, ρ). (X, ρ) è un reticolo?
(*v*) Determinare eventuali elementi minimali, massimali, minimo, massimo in (X, ρ).
(*vi*) Determinare, se esiste, un elemento $a \in S$ tale che $(X \cup \{a\}, \rho)$ sia un reticolo. È possibile scegliere a in modo che non sia il massimo di $(X \cup \{a\}, \rho)$? Nel caso a esista, il reticolo $(X \cup \{a\}, \rho)$ è distributivo? È complementato?

Esercizio 4. Sia $*$ l'operazione binaria definita in $\mathbb{Z}_{15}$ da: $(\forall a, b \in \mathbb{Z}_{15})(a * b = \bar{5}ab)$, e sia $+$ la consueta operazione di addizione $\mathbb{Z}_{15}$.

(*i*) Verificare che $(\mathbb{Z}_{15}, +, *)$ è un anello. È un anello commutativo? È unitario?
(*ii*) In $(\mathbb{Z}_{15}, +, *)$, quali tra $\bar{5}$, $\bar{3}$, $\bar{2}$ sono divisori dello zero?
(*iii*) Determinare tutti i divisori dello zero in $(\mathbb{Z}_{15}, +, *)$.

Esercizio 5. Si consideri il polinomio $f = 3x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 6x - 20 \in \mathbb{Z}[x]$.

(*i*) Quali tra gli interi 1, 2, -1 sono radici di f?
(*ii*) In $\mathbb{Q}[x]$, decomporre f in prodotto di polinomi irriducibili.
(*iii*) Per ciascuno dei fattori irriducibili di f in $\mathbb{Q}[x]$ determinati al punto precedente, si dica se esso è o non è irriducibile in $\mathbb{R}[x]$.

(Si ricorda che è parte essenziale dell'esercizio la giustificazione del fatto che i fattori indicati come irriducibili lo siano effettivamente.)