CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (GRUPPI I, II, RECUPERO)
5 SETTEMBRE 2014

Svolgere i seguenti esercizi, *giustificando* ***pienamente*** *tutte le risposte*. Sui fogli consegnati vanno indicati: nome, cognome, matricola e gruppo di appartenenza. Non è necessario consegnare la traccia.

Esercizio 1. Dare la definizione di *partizione* di un insieme. Fornire esempi di partizioni $\mathcal{F}$ di $\mathbb{Z}$ tali che:

(i) $|\mathcal{F}| = 5$;
(ii) $\mathcal{F}$ sia un insieme infinito.

Esercizio 2. Esiste un $m \in \mathbb{N}^+$ tale che $\mathbb{Z}_m$ abbia esattamente 3 elementi invertibili e 7 divisori dello zero (viene escluso $[0]_m$)?

Esercizio 3. Siano $S = \{a, b\}$ e $T = \{0, 1\}$, dove $a \neq b$. Sia X l'insieme di tutte le applicazioni da S a T.

(i) Elencare gli elementi (applicazioni) di X.
(ii) Di ciascuna di queste applicazioni, dire se è iniettiva e se è suriettiva.

Definire in X la relazione binaria Σ ponendo, per ogni $f, g \in X$,

$$f \;\Sigma\; g \iff (\forall s \in S)(f(s) \leq g(s)).$$

(iii) Verificare che (X, Σ) è una relazione d'ordine.
(iv) (X, Σ) è totale?
(v) In (X, Σ) determinare, se esistono, minimo e massimo.
(vi) Disegnare il diagramma di Hasse di (X, Σ).
(vii) Esiste un insieme Y tale che (X, Σ) sia isomorfo a $(\mathcal{P}(Y), \subseteq)$?

Esercizio 4. Sia $*$ l'operazione binaria definita in $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{12}$ da: $\forall a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{Z}_{12}$,

$$(a_1, b_1) * (a_2, b_2) = (a_1 a_2, a_1 b_2 + b_1).$$

(i) Verificare che $(\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{12}, *)$ è un monoide, identificandone l'elemento neutro. Questo monoide è commutativo?
(ii) Determinare gli elementi invertibili di $(\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{12}, *)$, descrivendone gli inversi;
(iii) calcolare in modo esplicito l'inverso di $(\bar{7}, \bar{2})$.

Esercizio 5. Detto S l'insieme dei polinomi di grado al più tre in $\mathbb{Z}_3[x]$, si considerino le applicazioni:

$$\varphi_1 \colon f \in S \mapsto f(\bar{1}) \in \mathbb{Z}_3 \qquad \text{e} \qquad \varphi_2 \colon f \in S \mapsto f(\bar{2}) \in \mathbb{Z}_3$$

(i) φ_1 è suriettiva? φ_2 è suriettiva?
(ii) Descrivere in modo esplicito le antiimmagini $A := \overleftarrow{\varphi_1}(\{\bar{0}\})$ e $B := \overleftarrow{\varphi_2}(\{\bar{0}\})$, e poi $A \cap B$, calcolando anche $|A|$, $|B|$ e $|A \cap B|$.
(iii) Stabilire se in A esistono polinomi che siano prodotto di due polinomi irriducibili.
(iv) Stabilire se in $A \cap B$ esistono polinomi che siano prodotto di due polinomi irriducibili.